NGUYỄN BẢO VƯƠNG

LỚP 10

Chương IV. Bài 1. BẤT ĐẲNG THỨC

BIÊN SOẠN VÀ SƯU TẦM

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong
Website: http://tailieutoanhoc.vn/
Email: baovuong@gmail.com
Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

TÀI LIỆU LỚP 10

Mục lục

BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa :

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề $"a > b"$, $"a < b"$, $"a \ge b"$, $"a \le b"$ được gọi là những *bất đẳng thức*.

- Chứng minh bất đảng thức là chứng minh bất đảng thức đó đúng(mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứ biến thì $"A > B"$ là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến $"A > B"$ đúng với tất cả các giá trị của biến(thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất :

* $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

* $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

* $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

* Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

* $a > b \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

* $a \ge b \ge 0 \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$

* $a > b \ge 0 \Rightarrow a^n > b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

* $-|a| \le a \le |a|$ với mọi số thực a .

* $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (Với $a > 0$)

* $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$ (Với $a > 0$)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Đối với hai số không âm

Cho $a \ge 0, b \ge 0$, ta có $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hệ quả :

* Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau

* Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$, ta có $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍCH CHẤT CƠ BẢN.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) $A \ge B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

Ta đi chứng minh $A - B \ge 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.

Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ b) $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge \left(a+b+c\right)^2$ d) $\left(a+b+c\right)^2 \ge 3\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) BĐT tương đương $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

d) BĐT tương đương $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \ge 3\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2\left(ab+bc+ca\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b+c+d+e)$.

Lời giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b+c+d+e) =$

$= (\dfrac{a^2}{4} - ab + b^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ac + c^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ad + d^2) + (\dfrac{a^2}{4} - ae + e^2)$

$=(\frac{a}{2}-b)^2+(\frac{a}{2}-c)^2+(\frac{a}{2}-d)^2+(\frac{a}{2}-e)^2\ge 0\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b=c=d=e=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab\ge 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\ge\frac{2}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab}=(\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{1+ab})+(\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab})$

$=\frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)}=\frac{a-b}{1+ab}(\frac{b}{1+b^2}-\frac{a}{1+a^2})=\frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$

$=\frac{a-b}{1+ab}\frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)}=\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)}\ge 0$ (Do $ab\ge 1$).

Nhận xét : Nếu $-1<b\le 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le\frac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4+3\ge 4x$ b) $x^4+5>x^2+4x$ c) $x^{12}+x^4+1>x^9+x$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-4x+3\ge 0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x^3+x^2+x-3)\ge 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2+2x+3)\ge 0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2\left[(x+1)^2+1\right]\ge 0$ (đúng với mọi số thực x)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-x^2-4x+5>0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+x^2-4x+4>0\Leftrightarrow(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$

Ta có $(x^2-1)^2\ge 0,(x-2)^2\ge 0\Rightarrow(x^2-1)^2+(x-2)^2\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-1=0\\x-2=0\end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

\+ Với $x<1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)$

Vì $x<1$ nên $1-x>0, 1-x^5>0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

\+ Với $x\ge 1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1$

Vì $x\ge 1$ nên $x^3-1\ge 0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Vậy ta có $x^{12}+x^4+1>x^9+x$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4+b^4-4ab+2\ge 0$

b) $2\left(a^4+1\right)+\left(b^2+1\right)^2\ge 2\left(ab+1\right)^2$

c) $3\left(a^2+b^2\right)-ab+4\ge 2\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(2a^2b^2-4ab+2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(ab-1\right)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

b) BĐT tương đương với $2\left(a^4+1\right)+\left(b^4+2b^2+1\right)-2\left(a^2b^2+2ab+1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(2a^2-4ab+2b^2\right)+\left(a^4-4a^2+1\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2+2(a-b)^2+(a^2-1)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

c) BĐT tương đương với $6\left(a^2+b^2\right)-2ab+8-4\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left[a^2-4a\sqrt{b^2+1}+4\left(b^2+1\right)\right]+\left[b^2-4b\sqrt{a^2+1}+4\left(a^2+1\right)\right]+\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(a-2\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(b-2\sqrt{a^2+1}\right)^2+\left(a-b\right)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6: Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x\ge y$. Chứng minh rằng;

a) $4\left(x^3-y^3\right)\ge\left(x-y\right)^3$

b) $x^3-3x+4\ge y^3-3y$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương $4\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^3\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[4\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^2\right]\ge 0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[3x^2+3xy+y^2\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x-y\right)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]\ge 0$ (đúng với $x\ge y$) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

b) Bất đẳng thức tương đương $x^3-y^3\ge 3x-3y-4$

Theo câu a) ta có $x^3 - y^3 \ge \frac{1}{4}(x-y)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$\frac{1}{4}(x-y)^3 \ge 3x - 3y - 4$ (*), Thật vậy,

BĐT (*) $\Leftrightarrow (x-y)^3 - 12(x-y) + 16 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-y)^2 + 2(x-y) - 8\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y-2)^2(x-y+4) \ge 0$ (đúng với $x \ge y$)

Đẳng thức xảy không xảy ra.

Loại 2: Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$a \in [\alpha;\beta] \Rightarrow (a-\alpha)(a-\beta) \le 0 \quad (*)$

$a,b,c \in [\alpha;\beta] \Rightarrow (a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) + (\beta-a)(\beta-b)(\beta-c) \ge 0 (**)$

Ví dụ 7 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :

$a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2$. Tương tự

$bc + ba > b^2; \ \ ca + cb > c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.

Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a-b| < c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 8 : Cho $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a,b,c \in [0;1] \Rightarrow (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$ (*)

Ta có : $a^2b^2c^2 \ge 0; \ \ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le a^2b + b^2c + c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a$ đpcm.

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với $a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \le 1$

Mà $a,b,c \in [0;1] \Rightarrow a^2 \le a, b^2 \le b, c^2 \le c$ do đó

$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \le a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \le 1$

Thật vậy: vì $a,b,c\in[0;1]$ nên theo nhận xét $(**)$ ta có

$$abc+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$$

$$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$$

vậy BĐT ban đầu được chứng minh

Ví dụ 9 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh : $2(1+a+b+c+ab+bc+ca)+abc\ge 0$.

Lời giải

Vì $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[-1;1]$ nên ta có :

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc\ge 0$ (*)

Mặt khác : $\dfrac{(1+a+b+c)^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 0$ (**)

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng nếu $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$ thì $a+b+c\ge 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a<9,b<8,c\le 7$ do đó áp dụng $(*)$ ta có

$(a-4)(a-9)\le 0,(b-5)(b-8)\le 0,(c-6)(c-7)\le 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$a^2+b^2+c^2-13(a+b+c)+118\le 0$ suy ra

$a+b+c\ge \dfrac{1}{13}\left(a^2+b^2+c^2+118\right)=16$ vì $a^2+b^2+c^2=90$

vậy $a+b+c\ge 16$ dấu "=" xảy ra khi $a=4,b=5,c=7$

Ví dụ 11: Cho ba số $a,\ b,\ c$ thuộc $[-1;1]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 2$$

Lời giải

Vì ba số $a,\ b,\ c$ thuộc $[-1;1]$ nên $0\le a^2,b^2,c^2\le 1$

Suy ra $(1-b^2)(1+b^2-a^4)\ge 0\Leftrightarrow a^4+b^4-a^4b^2\le 1$ (*)

Mặt khác $a^4\ge a^{2012},b^4\ge b^{2012}$ đúng với mọi $a,\ b$ thuộc $[-1;1]$

Suy ra $a^4+b^4-a^4b^2\ge a^{2012}+b^{2012}-a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012}+b^{2012}\le a^4b^2+1$ hay $\dfrac{a^4b^2+c^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}}\ge 1$

Tương tự ta có $\frac{b^4c^2+a^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 1$ và $\frac{c^4a^2+b^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 1$

Cộng vế với ta được $\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 3$

Hay $\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 2$ ĐPCM.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.0. Cho các số thực a, b, c là số thực. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

a)

A. $a+b+c \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$ **B.** $2a+2b+2c \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

C. $a+b+c \ge 3\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ **D.** $a+b+c \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

b)

A. $a^2+b^2+1 \ge ab+3a+2b$ **B.** $a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

C. $a^2+b^2+1 \ge 2ab+a+b$ **D.** $a^2+b^2+1 \ge ab+\frac{1}{2}a+b$

c)

A. $a^2+b^2+c^2+\frac{3}{2} \ge 2(a+b+c)$ **B.** $a^2+b^2+c^2+3 \ge 2(a+b+c)$

C. $2a^2+2b^2+2c^2+3 \ge 2(a+b+c)$ **D.** $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2+3 \ge 2(a+b+c)$

d)

A. $a^2+b^2+c^2 \ge 3(ab+bc-ca)$ **B.** $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{2}{3}(ab+bc-ca)$

C. $a^2+b^2+c^2 \ge \sqrt{2}(ab+bc-ca)$ **D.** $a^2+b^2+c^2 \ge 2(ab+bc-ca)$

Bài làm:

Bài 4.0: a) BĐT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \ge 0$

b) BĐT$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \ge 0$

c) BĐT $\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \ge 0$

d) BĐT$\Leftrightarrow (a-b+c)^2 \ge 0$

Bài 4.1: Cho a,b,c,d là số dương. Khẳng định nào sau đây đúng nhất?

a)

A. $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ với $\frac{a}{b} > 1$. **B.** $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$ với $\frac{a}{b} < 1$.

C. $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ với $\frac{a}{b}<1$.

D. $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ với $\frac{a}{b}=1$.

b)

A. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<1$

B. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$

C. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<3$

D. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<4$

c)

A. $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<3$

B. $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

C. $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<4$

D. $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<\frac{5}{2}$

d)

A. $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{5}{2}$

B. $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<4$

C. $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<5$

D. $2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$

✍**Bài làm:**

Bài 4.1: a) BĐT $\Leftrightarrow (a-b)c<0$

b) Sử dụng câu a), ta được: $\frac{a}{a+b}<\frac{a+c}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c}<\frac{b+a}{a+b+c}$, $\frac{c}{c+a}<\frac{c+b}{a+b+c}$.

Cộng các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

c) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{a+c}$

Tương tựta có $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b}{b+d}$, $\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c}{a+c}$; $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d}{d+b}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

d) Chứng minh tương tự câu c). Ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Cùng với 3 BĐT tương tự, ta suy ra đpcm

Bài tập tự luận

Bài 4.2: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $(ax+by)(bx+ay)\ge (a+b)^2xy$ (với $a,b>0;\ x,y\in R$) .

b) $\frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge \frac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$. với $a>b>0;\ c>\sqrt{ab}$.

c) $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\ge 4$ với $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

d) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>a^3+b^3+c^3$ với a,b,c là ba cạnh của tam giác

Bài làm:

Bài 4.2: a) BĐT $\Leftrightarrow abx^2+\left(a^2+b^2\right)xy+aby^2\ge \left(a+b\right)^2xy$

$\Leftrightarrow ab\left(x-y\right)^2\ge 0$ (đúng)

b) Bình phương 2 vế, ta phải chứng minh: $\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}\ge \frac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab)\ge 0$. Điều này hiển nhiên đúng do giải thiết.

c) Ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2c},\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}$

BĐT $\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2\frac{a}{b}-1}+\frac{\frac{c}{b}+1}{2\frac{c}{b}-1}\ge 4\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2c}+1}{1+\frac{a}{c}-1}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}+1}{1+\frac{c}{a}-1}\ge 4$

$\Leftrightarrow \frac{3c}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{3a}{2c}+\frac{1}{2}\ge 4\Leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{a^2+c^2}{ac}\ge 3\Leftrightarrow \left(a-c\right)^2\ge 0$ (đúng)

d) BĐT $\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ (đúng)

Bài 4.3: Cho $x\ge y\ge z\ge 0$. Chứng minh rằng:

a) $xy^3+yz^3+zx^3\ge xz^3+zy^3+yx^3$

b) $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge \frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}$.

Bài làm:

Bài 4.3: a) BĐT $\Leftrightarrow -x^3y+xy^3+x^3z-y^3z-xz^3+yz^3\le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\le 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

b) BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx)\ge 0$ (đúng vì $x\ge y\ge z\ge 0$)

Bài 4.4: Cho bốn số dương $a,\ b,\ c,\ d$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}.$$

Bài làm:

Bài 4.4: Ta có: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{a+b}{ab}}+\frac{1}{\frac{c+d}{cd}}\le\frac{1}{\frac{a+b+c+d}{(a+c)(b+d)}}$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}\Leftrightarrow\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{(a+b)(c+d)}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$\Leftrightarrow\frac{abc+abd+acd+bcd}{ac+ad+bc+bd}\le\frac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)\le(ab+ad+bc+cd)(ac+ad+bc+bd)$$

$$\Leftrightarrow 2abcd\le a^2d^2+b^2c^2\Leftrightarrow a^2d^2-2abcd+b^2c^2\ge0\Leftrightarrow(ad-bc)^2\ge0.$$

Do bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Bài 4.5: Cho $a,b,c\in[1;3]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$. Giá trị lớn nhất của $P=a^2+b^2+c^2$

A.14 **B.**13 **C.**12 **D.**11

Bài làm:

Bài 4.5: Vì $a,b,c\in[1;3]$ do đó ta có

$$(a-1)(b-1)(c-1)+(3-a)(3-b)(3-c)\ge0$$

$$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)-8(a+b+c)+26\ge0\Leftrightarrow(a+b+c)^2-8(a+b+c)+26\ge a^2+b^2+c^2$$

Mà $a+b+c=6$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le14$.

DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY(côsi) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRI LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

* Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2+y^2\ge2xy$; $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$; $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Đối với ba số: $abc\le\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a, b là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \ge 4$

b) $(a+b)^5 \ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2,\ \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{b}{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Suy ra $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \ge \frac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2 = a^2 + b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \Rightarrow ab \le 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \ge 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Ta có $(a+b)^5 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a^2 + 2ab + b^2 \ge 2\sqrt{2ab(a^2 + b^2)} = 4\sqrt{ab} \text{ và}$$

$$(a^3 + 3ab^2) + (3a^2b + b^3) \ge 2\sqrt{(a^3 + 3ab^2)(3a^2b + b^3)} = 4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$$

Suy ra $(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3) \ge 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5 \ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \ge 8$

b) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \ge 6abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}},\ b + \frac{1}{c} \ge 2\sqrt{\frac{b}{c}},\ c + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Suy ra $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 8\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}}=8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1+a^2\geq 2\sqrt{a^2}=2a$, tương tự ta có $1+b^2\geq 2b,\ 1+c^2\geq 2c$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a}=3abc$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

c) Ta có $(1+a)(1+b)(1+c)=1+\left(ab+bc+ca\right)+\left(a+b+c\right)+abc$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$ và $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c)\geq 1+3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2+3\sqrt[3]{abc}+abc=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$a^2\sqrt{bc}\leq a^2\left(\frac{b+c}{2}\right),\ b^2\sqrt{ac}\leq b^2\left(\frac{a+c}{2}\right),\ c^2\sqrt{ab}\leq c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\leq \frac{a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b}{2}$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b\leq \frac{a^3+a^3+b^3}{3},\ b^2a\leq \frac{b^3+b^3+a^3}{3},\ a^2c\leq \frac{a^3+a^3+c^3}{3},$

$c^2a\leq \frac{c^3+c^3+a^3}{3},\ b^2c\leq \frac{b^3+b^3+c^3}{3},\ c^2b\leq \frac{c^3+c^3+b^3}{3}$

Suy ra $a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\leq 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\leq a^3+b^3+c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\frac{a+b+c+d}{4}\geq \sqrt[4]{abcd}$

b) $\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)\left(a+b\right)\left(b+c\right)\geq 16$

c) $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 4.$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+b\ge 2\sqrt{ab}, c+d\ge 2\sqrt{cd}$ và $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ge 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}=2\sqrt[4]{abcd}$

Suy ra $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge \dfrac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}\ge \sqrt[4]{abcd}$ ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}.\frac{b}{c^3}.\frac{c}{d^3}.\frac{d}{a^3}}=\frac{4}{\sqrt{abcd}}$$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{d^3}+\dfrac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\ge \dfrac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}=16$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

c) Áp dụng câu a) ta có

$$VT=3.\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 4\sqrt[4]{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=4\sqrt[4]{\frac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $4\sqrt[4]{\dfrac{8(a+b+c)^3}{27(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 4$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3\ge 27(a+b)(b+c)(c+a)$ (*)

Áp dụng BĐT côsi cho ba số ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a)\le\left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3=\frac{8(a+b+c)^3}{27}$$

Suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: BĐT câu a) là bất đẳng côsi cho bốn số không âm. Ta có BĐT côsi cho n số không âm như sau: Cho n số không âm a_i, $i=1,2,...,n$.

Khi đó ta có $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$

b) $\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}\le\dfrac{3}{4}$

Lời giải

a) Ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=9\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2b^2=9$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^4+b^4 \ge 2a^2b^2$, $b^4+c^4 \ge 2b^2c^2$, $c^4+a^4 \ge 2c^2a^2$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le 3$ (3)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+a^2b^2 \ge 2\sqrt{a^2.a^2b^2}=2a^2b$, tương tự ta có $b^2+b^2c^2 \ge 2b^2c,\ c^2+c^2a^2 \ge 2c^2a$

Cộng vế với vế ta được $a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b+b^2c+c^2a \le 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$3+a^2=3+\left(3-b^2-c^2\right)=\left(3-b^2\right)+\left(3-c^2\right) \ge 2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{3+a^2} \le \frac{bc}{2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{3-c^2}.\frac{c^2}{3-b^2}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{3-c^2}+\frac{c^2}{3-b^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{ab}{3+c^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$, $\frac{ca}{3+b^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2} \le \frac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x+y+z \ge a+b+c$ (hoặc $xyz \ge abc$), ta thường đi chứng minh $x+y \ge 2a$ (hoặc $ab \le x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \ge a+b+c$ b) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b$

Tương tự ta có $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \ge 2c,\ \frac{ac}{b}+\frac{ba}{c} \ge 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right) \ge 2\left(a+b+c\right) \Leftrightarrow \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \ge a+b+c \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}}=\frac{2}{b}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c},\ \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\Leftrightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$

b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c}.\frac{b^3c^3}{a}}=2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 2abc^3$, $\frac{c^3a^3}{b}+\frac{a^3b^3}{c}\ge 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\right)\ge 2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9$

$\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2.\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 2c^2$, $\left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\ge 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $8(a+b)(b+c)(c+a) \le (3+a)(3+b)(3+c)$

b) $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$(a+b)(b+c) \le \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 = \frac{(3+a)^2}{4}$$

Tương tự ta có $(b+c)(c+a) \le \frac{(3+c)^2}{4}$, $(c+a)(a+b) \le \frac{(3+a)^2}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được $\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \le 64\left[(3+a)(3+b)(3+c)\right]^2$

Suy ra $8(a+b)(b+c)(c+a) \le (3+a)(3+b)(3+c)$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) * TH1: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) > 0$:

+ Nếu cả ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ đều dương. Áp dụng BĐT côsi ta có

$(3-2a)(3-2b) \le \left(\frac{(3-2a)+(3-2b)}{2}\right)^2 = c^2$, tương tự ta có

$(3-2b)(3-2c) \le a^2$, $(3-2c)(3-2a) \le b^2$

Nhân vế với vế ta được $\left[(3-2a)(3-2b)(3-2c)\right]^2 \le a^2b^2c^2$

Hay $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le abc$.

+ Nếu hai trong ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a<0,\ 3-2b<0$ suy racó $6-2a-2b<0 \Leftrightarrow c<0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 8: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4} \ge b;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4} \ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta đươc :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý :Việc ta ghép $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng vế trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\frac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 9: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}\ge \frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}\ge \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đặt $P=\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{\sqrt{2}a\left(b+1\right)}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{\sqrt{2}a\left(b+1\right)}{4}}=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{\sqrt{2}b\left(c+1\right)}{4}\ge \frac{3\sqrt{2}b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{2}c\left(a+1\right)}{4}\ge \frac{3\sqrt{2}c}{2}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$2P+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)\ge \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow P\ge \frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(ab+bc+ca\right)\ \text{(vì } a+b+c=3\text{)}$$

Mặt khác ta có $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca\le 3$

Suy ra $\Leftrightarrow P\ge \frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}.3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Đặt $Q=\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}$

Ta có $Q=\frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $4\sqrt{a(b+3)}=2\sqrt{4a(b+3)}\le 4a+b+3$

Suy ra $\frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}}\ge\frac{4a^2}{4a+b+3}$, tương tự ta có

$\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}}\ge\frac{4b^2}{4b+c+3}$, $\frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}\ge\frac{4c^2}{4c+a+3}$

Cộng vế với vế lại ta được $Q\ge\frac{4a^2}{4a+b+3}+\frac{4b^2}{4b+c+3}+\frac{4c^2}{4c+a+3}=L$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$\frac{4a^2}{4a+b+3}+\frac{1}{16}(4a+b+3)\ge 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a+b+3}.\frac{1}{16}(4a+b+3)}=a$

Tương tự ta có

$\frac{4b^2}{4b+c+3}+\frac{1}{16}(4b+c+3)\ge b$, $\frac{4c^2}{4c+a+3}+\frac{1}{16}(4c+a+3)\ge c$

Cộng vế với vế lại ta được $L+\frac{1}{16}\left[5(a+b+c)+9\right]\ge a+b+c$

Vì $a+b+c=3$ nên $L\ge\frac{3}{2}$ suy ra $Q\ge\frac{3}{2}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 10: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c)$.

Lời giải

Ta có $\left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right]=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2\ge 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab+1\ge a+b\Leftrightarrow 2(ab+c+1)\ge 2(a+b+c)$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(ab+c+1)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\ge 2(ab+c)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab}=2c$, $\frac{1}{c^2}+1\ge\frac{2}{c}=2ab$ (do $abc=1$)

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\ge 2(ab+c)$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x>2$ b) $g(x)=2x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ với $x>-1$

c) $h(x)=x+\dfrac{3}{x}$ với $x\ge 2$ d) $k(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ với $0<x\le\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}=x-2+\dfrac{1}{x-2}+2$

Do $x>2$ nên $x-2>0, \dfrac{1}{x-2}>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$x-2+\frac{1}{x-2}\ge 2\sqrt{(x-2).\frac{1}{x-2}}=2$$

Suy ra $f(x)\ge 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-2=\dfrac{1}{x-2}\Leftrightarrow (x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ (loại) hoặc $x=3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f(x)=4$ khi và chỉ khi $x=3$.

b) Do $x>-1$ nên $x+1>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$g(x)=(x+1)+(x+1)+\frac{1}{(x+1)^2}-2\ge 3\sqrt[3]{(x+1).(x+1).\frac{1}{(x+1)^2}}-2=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{(x+1)^2}\Leftrightarrow (x+1)^3=1\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g(x)=1$ khi và chỉ khi $x=0$.

c) Ta có $h(x)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{x}.\dfrac{3x}{4}}=3$

Mặt khác $x\ge 2$ suy ra $h(x)=\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{3x}{4}\right)+\dfrac{x}{4}\ge 3+\dfrac{2}{4}=\dfrac{7}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x}{4}\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Vậy $\min h(x)=\dfrac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x=2$.

d) Ta có $k(x)=x+x+\dfrac{1}{8x^2}+\dfrac{7}{8x^2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x+x+\frac{1}{8x^2}\ge 3\sqrt[3]{x.x.\frac{1}{8x^2}}=\frac{3}{2}$

Mặt khác $0<x\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{7}{8x^2}\ge\frac{7}{2}$ suy ra $k(x)\ge\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{8x^2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy $\min k(x)=5$ khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 12: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=(1+2a)(1+2bc)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2\ge 2ma\Rightarrow 2a\le\frac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b,c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b=c$ nên ta đánh giá $2bc\le b^2+c^2$. Suy ra $A\le\left(\frac{a^2}{m}+m+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2+b^2+c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B=\frac{1}{m}\left(a^2+m^2+m\right)\left(1+b^2+c^2\right)\le\frac{1}{m}\left(\frac{\left(a^2+m^2+m\right)+\left(1+b^2+c^2\right)}{2}\right)^2$$

Suy ra $A\le\frac{1}{4m}\left(m^2+m+2\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a=m,\ b=c, a^2+m^2+m=1+b^2+c^2$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Từ đây ta có $m=\frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\frac{4}{9}\ge\frac{4}{3}a\Rightarrow 2a\le\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}$ và $2bc\le b^2+c^2$

Suy ra $A\le\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+\frac{10}{9}+b^2+c^2+1}{2}\right)^2=\frac{98}{27}$$

Suy ra $A\le\frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c\\ a^2+\frac{10}{9}=b^2+c^2+1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}\end{cases}$

Vậy $\max A=\frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a=\frac{2}{3}$ và $b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 13: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a+4b+3c^2=68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2+c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a+4b+3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m,n,p dương)

$a^2+m^2\ge 2am,\ b^2+n^2\ge 2bn$ và $\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+4p^3\ge 3pc^2$

Suy ra $a^2+b^2+c^3+m^2+n^2+4p^3\ge 2am+2bn+3pc$ (*)

Để $2am+2bn+3pc^2$ có thể bội số của $2a+4b+3c^2$ thì

$\frac{2m}{2}=\frac{2n}{4}=\frac{3p}{3}\Leftrightarrow m=\frac{n}{2}=p$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a=m,b=n,c=2p$

Hay $a=m,b=2m,c=2m\Rightarrow 2m+4.(2m)+3(2m)^2=68$

$\Leftrightarrow 12m^2+10m-68=0\Leftrightarrow m=2$ (nhận) hoặc $m=-\frac{17}{6}$ (loại)

Suy ra $p=2,n=4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có

$a^2+4\ge 4a,\ b^2+16\ge 8b$ và $\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+32\ge 6c^2$

Cộng vế với vế ta được

$a^2+b^2+c^3+52\ge 4a+8b+6c^2$, kết hợp với $2a+4b+3c^2=68$

Suy ra $a^2+b^2+c^3\ge 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=4,c=4$

Vậy $\min A=84\Leftrightarrow a=2,b=4,c=4$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{1-x^3}}$ với $x<1$

b) $B=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$ với $-2\le x\le 5$.

Lời giải

a) Ta có $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{\left(1-x\right)\left(x^2+x+1\right)}}$

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\left(1-x\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\left(1-x\right)}.\sqrt{x^2+x+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\left(1-x\right)+x^2+x+1}{2}=\frac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra $A\ge\dfrac{x^2-x+3}{\dfrac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\left(1-x\right)=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy $\min\limits_{x<1}A=2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

b) Ta có $B=\dfrac{x+11}{\sqrt{-x^2+4x+21}+\sqrt{-x^2+3x+10}}=\dfrac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}}$

Với $-2\le x\le 5$ thì $x+11\,;\,x+3\,;\,7-x\,;\,x+2\,;\,5-x$ là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :

$$\sqrt{(x+3)(7-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+6)(7-x)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+6)+(7-x)}{2}\right)=\frac{x+13}{2\sqrt{2}}\quad(1)$$

$$\sqrt{(x+2)(5-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+4)(5-x)}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+4)+(5-x)}{2}\right)=\frac{x+9}{2\sqrt{2}}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}\le\dfrac{x+11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B\ge\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\min\limits_{-2\le x\le 5}B=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Loại 4: Kĩ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 15: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a}{a+2\sqrt{bc}}\right)\le\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a}{a+b+c}\right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a+b+c}\right), \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{a+b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P \le \frac{1}{2}\left(3-\frac{a}{a+b+c}-\frac{b}{a+b+c}-\frac{c}{a+b+c}\right)=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a=b=c$

Ví dụ 16: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

b) $\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2} \ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2} \ge b-\frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2} \ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \le 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a\left(a+2b^3\right)-2ab^3}{a+2b^3} \ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3} \ge b-\frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}, \frac{c^2}{c+2a^3} \ge c-\frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3} \ge a+b+c-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}+c\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Mặt khác $a+b+c=3$ do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2} \le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2} \le \frac{1}{3}b.(a+a+1)=\frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2} \le \frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2} \le \frac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2} \le \frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}=\frac{2}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2} \le \frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.3=3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 17: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\frac{c}{1+ab}+\frac{b}{1+ac}+\frac{a}{1+bc} \ge 1$

Lời giải

Đặt $P=\frac{c}{1+ab}+\frac{b}{1+ac}+\frac{a}{1+bc}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{c}{1+ab}=c-\frac{abc}{1+ab} \ge c-\frac{abc}{2\sqrt{ab}}=c-\frac{\sqrt{(ca)(cb)}}{2} \ge c-\frac{ca+cb}{4}$$

Tương tự ta ta có $\frac{b}{1+ac} \ge b-\frac{ba+bc}{4}$, $\frac{a}{1+bc} \le a-\frac{ab+ac}{4}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $P \ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow (a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ca)$ (*)Hay $ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-1}{2}$

Suy ra $P \ge a+b+c-\frac{(a+b+c)^2-1}{4}=\frac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4}+1$ (1)

Từ giả thiết ta có $a,b,c \in [0;1] \Rightarrow 3-a-b-c \ge 0$ (2)

Và từ (*) suy ra $a+b+c \ge 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P \ge 1$. ĐPCM

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.6: Cho x,y,z dương. Chứng minh rằng $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \le \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.

Bài làm:

Bài 4.6: Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có:

$$x^3+y^2 \ge 2xy\sqrt{x} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} \le \frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}}=\frac{1}{xy}.$$

Tương tự: $\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}\le\frac{1}{yz}$; $\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{zx}\Rightarrow VT\le\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

Vậy : $VT\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.7: Cho các số dương *x, y, z* thỏa mãn $xyz=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$$

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** $5\sqrt{3}$

Bài làm:

Bài 4.7: Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3\ge 3xy\Rightarrow\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$, $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=3\quad(2)$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 4.8: Với các số dương *a, b, c, d* sao cho: $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1$

Giá trị lớn nhất của $P=abcd$

A. $\frac{1}{81}$ **B.**1 **C.**2 **D.** $\frac{1}{64}$

Bài làm:

Bài 4.8: $\frac{1}{1+a}=1-\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}\ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$

Xây dựng các BĐT tương tự rồi nhân vế với vế ta được $abcd\le\frac{1}{81}$

Bài 4.9: Với các số dương *a, b, c* sao cho: $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}=1$

Giá trị nhỏ nhất của $P=\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-1\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right)$

A.3 **B.**4 **C.**6 **D.**8

Bài làm:

Bài 4.9: $1-\frac{a}{1+b}=\frac{1+b-a}{1+b}=\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{(1+c)(1+a)}}$

Chứng minh tương tự, ta thu được:

$$(1+b-a)(1+c-b)(1+a-c)\ge 8abc$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-a\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right)\ge 8$$

Bài 4.10: Cho ba số dương x,y,z thoả mãn hệ thức $xyz(x+y+z)=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)(x+z)$.

A.2 **B.**4 **C.**6 **D.**8

Bài làm:

Bài 4.10: Ta có $1=xyz(x+y+z)=yz(x^2+xy+xz)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P=(x+y)(x+z)=yz+(x^2+xy+zx)\ge 2\sqrt{yz.(x^2+xy+zx)}=2$$

Suy ra $\min P=2$.

Bài 4.11: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Giá trị lớn nhất của $P=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.**1 **D.**2

Bài làm:

Bài 4.11: Ta có $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$

Tương tự $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$, $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.12: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}.$$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.**1 **D.**2

Bài làm:

Bài 4.12: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$, $\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}$.

Bài tập tự luận

Bài 4.13: Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng $1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}$.

Bài làm:

Bài 4.13: BĐT $\Leftrightarrow a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\ge 6$

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\ge 2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}\ge 6$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ (đúng)

Bài 4.14: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** 4

Bài làm:

Bài 4.14: Ta có $(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)+3=$

$$=\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right)$$

$$=\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)}$$

$$=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+b)}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{c(1+a)}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1+a}{a(1+b)}.\frac{1+b}{b(1+c)}.\frac{1+c}{c(1+a)}}=3$$

$$\frac{b(1+c)}{a(1+b)}+\frac{c(1+b)}{b(1+c)}+\frac{a(1+b)}{c(1+a)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b(1+c)}{a(1+b)}.\frac{c(1+b)}{b(1+c)}.\frac{a(1+b)}{c(1+a)}}=3$$

Suy ra $(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)+3\geq 6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.15: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}$.

A.3 **B.**2 **C.**4 **D.**1

Bài làm:

Bài 4.15: Áp dụng BĐT côsi ta có

$\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq 1$ (*)

Ta có $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{2ab}.\frac{2\sqrt{bc}}{2bc}.\frac{2\sqrt{ca}}{2ca}=\frac{2}{abc}$ (1)

Mặt khác $3=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài tập tự luận

Bài 4.16: Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Bài làm

Bài 4.16: Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{a}{a}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}\geq\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\geq\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\geq 3.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.17: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}+\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}+\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}$

A. $\min P=\sqrt{6}$ **B.** $\min P=\sqrt{26}$ **C.** $\min P=\sqrt{5}$ **D.** $\min P=5$

Bài làm:

Bài 4.17: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a(2b+2c-a)}}\ge\frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}$

Tương tự: $\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}\ge\frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}\ge\frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}$

Cộng 3 BĐT trên ta được:

$P\ge\frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c}=\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy $\min P=\sqrt{6}$.

Bài tập tự luận

Bài 4.18: Với các số dương *a*, *b*, *c*, chứng minh rằng:

a) $a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2$

b) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

c) $\frac{a^6}{b^3}+\frac{b^6}{c^3}+\frac{c^6}{a^3}\ge\frac{a^4}{c}+\frac{b^4}{a}+\frac{c^4}{b}$

Bài 4.18: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a^3+b^3+b^3\ge 3ab^2$, $b^3+c^3+c^3\ge 3bc^3$, $c^3+a^3+a^3\ge 3ca^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2$, $\frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2$, $\frac{c^3}{a}+ca\ge 2c^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (1)

Lại có, $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

c) Áp dụng BĐT côsi $\frac{a^6}{b^3} + \frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} \ge \frac{3a^4}{c}$ .Chứng minh tương tự, ta thu được: $\frac{a^6}{b^3} + \frac{b^6}{c^3} + \frac{c^6}{a^3} \ge \frac{a^4}{c} + \frac{b^4}{a} + \frac{c^4}{b}$

Bài 4.19: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a^3 + b^3 + c^3$

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{13}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{12}}$

Bài làm:

Bài 4.19: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a^3 + b^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \ge ab\sqrt{3}$

$b^3 + c^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \ge bc\sqrt{3},\ c^3 + a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \ge ca\sqrt{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \ge \sqrt{3}\left(ab + bc + ca\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \ge \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Với các số dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện $4\left(a + b + c\right) = 3abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{13}{8}$ **C.** $\frac{23}{8}$ **D.** 2

Bài làm:

Bài 4.20: Ta có: $4\left(a + b + c\right) = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$

$\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2}.\frac{1}{bc},\ \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2}.\frac{1}{ca}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \frac{3}{8} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \ge \frac{3}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Bài tập tự luận

Bài 4.21: Với các số dương *a*, *b*, c. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$

b) $\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\ge\frac{2}{9}(a+b+c)$

Bài làm

Bài 4.21: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}b$, $\frac{c^3}{a(a+b)}+\frac{a}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}c$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}+a+b+c\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c+2a}{27}+\frac{c+2a}{27}\ge\frac{b}{3}$,

$$\frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+2b}{27}+\frac{a+2b}{27}\ge\frac{c}{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+b+c}{9}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 4.22: Cho x,y,z dương thỏa mãn và $xyz=1$. Chứng minh rằng : $x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$.

Bài làm

Bài 4.22: Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực không âm ta có :

$x^3+1+1\ge 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x\Leftrightarrow x^3+2\ge 3x$ .Tương tự : $y^3+2\ge 3y;\ z^3+2\ge 3y$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : $x^3+y^3+z^3+6\ge 3(x+y+z)$

Mặt khác : $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow 2(x+y+z)\ge 6$.

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3+6\ge (x+y+z)+2(x+y+z)\Rightarrow x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.23: Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$ .Chứng minh rằng: $9(a^4+b^4+c^4)\ge a^2+b^2+c^2$.

Bài làm

Bài 4.23: Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$a^4+\frac{1}{81}\ge \frac{2}{9}a^2$; $b^4+\frac{1}{81}\ge \frac{2}{9}b^2$ **;** $c^4+\frac{1}{81}\ge \frac{2}{9}b^2$ cộng ba BĐT lại với nhau

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+\frac{1}{27}\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{9}+\frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow 9(a^4+b^4+c^4)\ge a^2+b^2+c^2$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4.24: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=(1+\frac{1}{x})^4+(1+\frac{1}{y})^4+(1+\frac{1}{z})^4$.

A. 768 **B.**244 **C.**453 **D.**489

Bài làm:

Bài 4.24: Đặt $a=1+\frac{1}{x};\ b=1+\frac{1}{y};\ c=1+\frac{1}{z}\Rightarrow a+b+c\ge 12$

Ta có : $a^4+4^4+4^4+4^4\ge 4\sqrt[4]{4^{12}a^4}=4^4a\Leftrightarrow a^4+3.4^4\ge 4^4a$. Tương tự

$b^4+3.4^4\ge 4^4b;\ \ c^4+3.4^4\ge 4^4c$ cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được

$a^4+b^4+c^4+9.4^4\ge 4^4(a+b+c)\ge 12.4^4\Rightarrow a^4+b^4+c^4\ge 3.4^4=768$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=4\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4.25: Cho a,b dương thỏa mãn $a+b=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $P=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}$

A.6 **B.**8 **C.**9 **D.**1

b) $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab$

A.11 **B.**12 **C.**14 **D.**17

c) $P=\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right)$

A. $\frac{289}{16}$ **B.** $\frac{29}{16}$ **C.** $\frac{28}{16}$ **D.** $\frac{289}{26}$

Bài làm:

Bài 4.25: a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{1}{2ab}+2\sqrt{\frac{1}{2ab\left(a^2+b^2\right)}}\ge\frac{2}{\left(a+b\right)^2}+2\sqrt{\frac{4}{\left(a+b\right)^2}}=6$ b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{5}{4ab}+\left(\frac{1}{4ab}+4ab\right)$.

$A\ge\frac{4}{\left(a+b\right)^2}+\frac{5}{\left(a+b\right)^2}+4\sqrt{\frac{1}{4ab}.4ab}=4+5+4=11$.

c) Ta có $\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{a^2b^2+1}{b^2}.\frac{a^2b^2+1}{a^2}=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2$

Ta có: $ab+\frac{1}{ab}=\left(ab+\frac{1}{16ab}\right)+\frac{15}{16ab}$ (1)

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $ab+\frac{1}{16ab}\ge2\sqrt{ab.\frac{1}{16ab}}=\frac{1}{2}$ (2)

mà $\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ nên $ab\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{ab}\ge4$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow ab+\frac{1}{ab}\ge\frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right)\ge\left(\frac{17}{4}\right)^2=\frac{289}{16}$

Bài 4.26: Cho hai số thực dương a,b. Chứng minh rằng

$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

Bài làm

Bài 4.26: Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\frac{1}{4}\ge a\Rightarrow a^2+b+\frac{3}{4}\ge a+b+\frac{1}{2}$

$b^2+\frac{1}{4}\ge b\Rightarrow b^2+a+\frac{3}{4}\ge a+b+\frac{1}{2}$

Suy ra $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2$ (1)

Theo BĐT côsi ta lại có $\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)\le\left(\frac{2a+2b+1}{2}\right)^2=\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.27: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$P=\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\frac{1}{2}$

Bài làm:

Bài 4.27: Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz\le 1$

Áp dụng côsi ta có $\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$$=\frac{1}{2xyz}+\left[\frac{1}{2xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]\ge\frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$=\frac{1}{2xyz}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(xy+xz)(yz+yx)(zx+zy)}}$$

$$\ge\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}}=\frac{3}{2}$$

Bài 4.28: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$

Bài làm

Bài 4.28: Ta có $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{(y+2)}{27}+\frac{(y^2-2y+4)}{27}\ge\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{x^3}{y^3+8}\ge\frac{9x+y-y^2-6}{27}$

Tương tự ta có

$\frac{y^3}{z^3+8}\ge\frac{9y+z-z^2-6}{27},\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{9z+x-x^2-6}{27}$ nên

$VT\ge\frac{10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)-18}{27}=\frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27}$ mà ta lại có

$$\frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27}=\frac{3+(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{27}=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 4.29: Cho a,b,c dương . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{1}{5}(a+b+c)$$

Bài làm

Bài 4.29: Áp dụng BĐT côsi ta có $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\le\frac{1}{2}(4a+6b)=2a+3b$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \dfrac{a^2}{2a+3b}$

Mặt khác $\dfrac{a^2}{2a+3b}+\dfrac{2a+3b}{25} \ge \dfrac{2a}{5} \Rightarrow \dfrac{a^2}{2a+3b} \ge \dfrac{8a-3b}{25}$

Do đó $\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \ge \dfrac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \ge \dfrac{8b-3c}{25}$, $\dfrac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \dfrac{8c-3a}{25}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.30: Cho ba số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất

$P=\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}}+\sqrt{1+\dfrac{16y}{z+x}}+\sqrt{1+\dfrac{16z}{x+y}}$

A.9 **B.**3 **C.**6 **D.**12

✍**Bài làm:**

Bài 4.30: Áp dụng bất đẳng thức BĐT côsi ta có

$6\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}} \le \left(1+\dfrac{16x}{y+z}\right)+9=\dfrac{2(8x+5y+5z)}{y+z}$

Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}} \le \dfrac{8x+5y+5z}{3(y+z)}$ (*). Sử dụng (*), ta có

$\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}}=\left(\sqrt{1+\dfrac{16x}{y+z}}-1\right)+1=\dfrac{\frac{16x}{y+z}}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+1}+1 \ge \dfrac{\frac{16x}{y+z}}{\frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}+1}+1=\dfrac{6x}{x+y+z}+1$. Tương tự, ta cũng có

$\sqrt{1+\dfrac{16y}{z+x}} \ge \dfrac{6y}{x+y+z}+1$, $\sqrt{1+\dfrac{16z}{x+y}} \ge \dfrac{6z}{x+y+z}+1$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.31: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc \ge 1$. Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} \le \sqrt{2}\left(a+b+c\right)$

Bài làm

Bài 4.31: Ta có $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(a+1)^2-2a}=\sqrt{\left(a+1-\sqrt{2a}\right)\left(a+1+\sqrt{2a}\right)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(a+1-\sqrt{2a}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(a+1+\sqrt{2a}\right)}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\sqrt{a^2+1} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(a+1-\sqrt{2a}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)\left(a+1+\sqrt{2a}\right)}{2}=\sqrt{2}\left(a-\sqrt{a}+1\right)$

Tương tự ta có $\sqrt{b^2+1} \le \sqrt{2}\left(b-\sqrt{b}+1\right)$, $\sqrt{c^2+1} \le \sqrt{2}\left(c-\sqrt{c}+1\right)$

Cộng vế với vế các BĐT ta có

$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}\left(a+b+c-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+3\right)$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}\ge 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}\left(a+b+c\right)$

Bài 4.32: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\left(c+a\right)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\left(a+b\right)^3}}\ge 1$

Bài làm

Bài 4.32: a) BĐT $\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b})\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$

Áp dụng BDT côsi ta có có :

$\frac{a^2}{b^2}+1\ge\frac{2a}{b};\ \frac{b^2}{c^2}+1\ge\frac{2b}{c};\ \frac{a^2}{b^2}+1\ge\frac{2a}{b};\ \frac{b^2}{c^2}+1\ge\frac{2b}{c};\ \frac{c^2}{a^2}+1\ge\frac{2c}{a}$

Mặt khác $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 6$

Cộng các vế các BĐT lại ta có ĐPCM.

b) Ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}=\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}$ với $x=\frac{b+c}{a}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-x+1}}\ge\frac{2}{x^2+2}=\frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+1}=\frac{2a^2}{\left(b+c\right)^2+2a^2}$$

Mặt khác ta có $\left(b+c\right)^2\le 2\left(b^2+c^2\right)\Rightarrow\frac{2a^2}{\left(b+c\right)^2+2a^2}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\left(c+a\right)^3}}\ge\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\ \sqrt{\frac{c^3}{c^3+\left(a+b\right)^3}}\ge\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.33: Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Tìm giá trị lớn nhất $P=xy+yz+zx-xyz$.

A.2 **B.**3 **C.**4 **D.**6

Bài làm:

Bài 4.33: Không mất tính tổng quát giả sử $(1-x)(1-y)\geq 0 \Leftrightarrow x+y-xy\leq 1$

Suy ra $z(x+y-xy)\leq z \Rightarrow xy+yz+zx-xyz\leq xy+z$

Mặt khác, theo BĐT côsi ta có $xy=\sqrt[3]{x^3.y^3.1}\leq \frac{x^3+y^3+1}{3}$; $z=\sqrt[3]{z^3.1.1}\leq \frac{z^3+1+1}{3}$.

Suy ra $xy+z\leq \frac{x^3+y^3+z^3+3}{3}=2$ ĐPCM.

Bài 4.34: Cho x,y,z dương thỏa mãn $y^2+yz+z^2=1-\frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

A. $\sqrt{2}$ **B.**2 **C.**1 **D.** $\sqrt{3}$

Bài làm:

Bài 4.34: $y^2+yz+z^2=1-\frac{3x^2}{2}$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2)+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2)+yz+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=1$.

Ta có $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\geq xy$, $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2\geq yz$

Suy ra $\frac{1}{2}(x+y+z)^2\leq 1\Leftrightarrow |P|\leq\sqrt{2}$

Bài 4.40: Cho x,y,z dương thỏa mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$

A. $\min T=\frac{1}{2}$ **B.** $\min T=\frac{1}{12}$ **C.** $\min T=\frac{1}{22}$ **D.** $\min T=\frac{1}{32}$

Bài làm:

Bài 4.40: Ta có: $\frac{x^2}{x+y}=\frac{x\left(x+y\right)-xy}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}\geq x-\frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y^2}{y+z}\geq y-\frac{\sqrt{yz}}{2}$; $\frac{z^2}{z+x}\geq z-\frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T\geq x+y+z-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}=x+y+z-\frac{1}{2}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(vì $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$)

Vậy $\min T=\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4.41: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=3$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^2}{x+y^2}+\frac{y^2}{y+z^2}+\frac{z^2}{z+x^2}$.

A. $\min A=\frac{3}{22}$ **B.** $\min A=1$ **C.** $\min A=3$ **D.** $\min A=\frac{3}{2}$

Bài làm:

Bài 4.41: Theo BĐT côsi ta có

$$A=x+y+z-\left(\frac{xy^2}{x+y^2}+\frac{yz^2}{y+z^2}+\frac{zx^2}{z+x^2}\right)\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}y+\sqrt{y}z+\sqrt{z}x\right)$$

Lại có $\sqrt{x}y+\sqrt{y}z+\sqrt{z}x\le\frac{1}{2}[(x+1)y+(y+1)z+(z+1)x]=\frac{1}{2}(x+y+z+xy+yz+zx)\le\frac{1}{2}(3+\frac{1}{3}(x+y+z)^2)=3$

$\Rightarrow A\ge\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$

Vậy $\min A=\frac{3}{2}$

DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x=f(a,b,c)$, $y=g(a,b,c)$, $z=h(a,b,c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t=f(a;b;c)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho các số dương a,b,c.

a) Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{6b+8c}{2a+b}+\frac{3a+2b+c}{b+c}\ge 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

a) Đặt $x=a+b+c,\ y=2a+b,\ z=b+c$

Suy ra $a=x-z,\ b=-2x+y+2z,\ c=2x-y-z$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{-x+y+z}{x}+\frac{4x-2y+4z}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 7$

$$\Leftrightarrow -1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4x}{y}-2+\frac{4z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\ge 7$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{y}{z}\right)\ge 10\ (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\ge 4,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2,\ \frac{4z}{y}+\frac{y}{z}\ge 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = z \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y = 2z$ suy ra không tồn tại a, b, c.

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x = a + b + c,\ y = b + c + 4a,\ z = c + a + 16b$

Suy ra $a = \frac{y - x}{3},\ b = \frac{z - x}{15},\ c = \frac{21x - 5y - z}{15}$

Khi đó ta có $P = \frac{-6x + 5y + z}{15x} + \frac{4x - y}{3y} + \frac{16x - z}{15z}$

$\Rightarrow P = \frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} + \frac{z}{15y} + \frac{16x}{15z} - \frac{4}{5}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \ge \frac{4}{3},\ \frac{z}{15y} + \frac{16y}{15z} \ge \frac{8}{15}$

Suy ra $P \ge \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 2y = z \Leftrightarrow a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$

Vậy $\min P = \frac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a = \frac{5b}{3} = \frac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p - a} + \frac{b}{p - b} + \frac{c}{p - c} \ge \sqrt{\frac{b + c}{p - a}} + \sqrt{\frac{c + a}{p - b}} + \sqrt{\frac{a + b}{p - c}}$$

Lời giải

Đặt $x = p - a;\ y = p - b;\ z = p - c$ suy ra $a = y + z;\ b = z + x;\ c = x + y$.

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên x, y, z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng: $\frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} \ge \sqrt{2 + \frac{y + z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z + x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x + y}{z}}$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2 + \frac{y + z}{x}} \le \left(2 + \frac{y + z}{x}\right) + 4 = \frac{y + z}{x} + 6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2 + \frac{z + x}{y}} \le \frac{z + x}{y} + 6,\ 4\sqrt{2 + \frac{x + y}{z}} \le \frac{x + y}{z} + 6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2 + \frac{y + z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z + x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x + y}{z}}\right) \le \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} + 18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} \ge \frac{1}{4}\left(\frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} + 18\right)$

$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$.

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

Nhận xét : Đối với BĐT có giả thiết a,b,c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2},\ y=\frac{a-b+c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$ và x,y,z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x,y,z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 3: Cho x,y,z là số dương. Chứng minh rằng $x^3+2y^3+3z^3\ge \frac{1590}{1331}(x+y+z)^3$

Lời giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3+2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3+3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3\ge$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z},\ b=\frac{y}{x+y+z},\ c=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow a,b,c$ dương và $a+b+c=1$

BĐT trở thành $a^3+2b^3+3c^3\ge \frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3\ge \frac{18}{11}a$, $2b^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3\ge \frac{18}{11}b$, $3c^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3\ge \frac{18}{11}c$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$a^3+2b^3+3c^3+\frac{588}{1331}\ge \frac{18}{11}(a+b+c)=\frac{18}{11}$

Suy ra $a^3+2b^3+3c^3\ge \frac{1590}{1331}$.

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc(Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa)

Ví dụ 4: Cho x,y,z là số dương thỏa mãn $x+y+z\le \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{15}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ và $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z}$

Suy ra $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z+\frac{9}{x+y+z}$

Đặt $t=x+y+z\Rightarrow 0<t\le \frac{3}{2}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x+y+z+\frac{9}{x+y+z}=t+\frac{9}{t}\ge \frac{15}{2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$t+\frac{9}{t}=t+\frac{9}{4t}+\frac{27}{4t}\ge 2\sqrt{t.\frac{9}{4t}}+\frac{27}{4.\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1\Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4=abc+ab+bc+ca\ge abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}=t^3+3t^2$, với $t=\sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow t^3+3t^2-4\le 0\Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2\le 0\Leftrightarrow t\le 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có

$P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3\sqrt[3]{abc}+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $P\ge 3t+\frac{4}{t}=\left(3t+\frac{3}{t}\right)+\frac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t+\frac{3}{t}\ge 2\sqrt{3t.\frac{3}{t}}=6$, mặt khác $t\le 1\Rightarrow \frac{1}{t}\ge 1$

Do đó $P\ge 3t+\frac{4}{t}\ge 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $\min P=7\Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 6: Cho $x,\ y,\ z$ dương thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2+14xyz}{4(x+y+z)^2+15xyz}$

Lời giải

Ta có $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=8\Leftrightarrow 8xyz=1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+14xyz=(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2\ \ (1)$

Áp dụng BĐT côsi ta có: $8=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\geq\dfrac{8}{\sqrt{xyz}}\Rightarrow xyz\geq 1\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $P\leq\dfrac{(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2}{4(x+y+z)^2+15}=\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}$ với $x+y+z=t>0$.

Xét $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-t^2+6t-9}{12t^2+45}=-\dfrac{(t-3)^2}{12t^2+45}\leq 0$

Suy ra $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}\leq\dfrac{1}{3}$ do đó $P\leq\dfrac{1}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=3$ hay $x=y=z=1$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.42: Cho x,y,z dương, CMR $\dfrac{25x}{y+z}+\dfrac{4y}{z+x}+\dfrac{9z}{x+y}>12$

Bài làm

Bài 4.42: Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y$ (với a,b,c dương) $\Rightarrow x=\dfrac{b+c-a}{2},y=\dfrac{c+a-b}{2},z=\dfrac{a+b-c}{2}$

$2VT=\dfrac{25(b+c-a)}{a}+\dfrac{4(c+a-b)}{b}+\dfrac{9(a+b-c)}{c}=\left(\dfrac{25b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)+\left(\dfrac{25c}{a}+\dfrac{9a}{c}\right)+\left(\dfrac{4c}{b}+\dfrac{9b}{c}\right)-38$ Dấu bằng xảy ra khi

$\geq 20+30+12=24\Rightarrow VT\geq 12$

$\begin{cases}25b^2=4a^2\\25c^2=9a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases}\Rightarrow 5b+5c=5a\Rightarrow x=0$ (vô lí)

Bài 4.43: Cho các số dương $a,b,c.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của

$P=\dfrac{4a}{a+b+2c}+\dfrac{b+3c}{2a+b+c}-\dfrac{8c}{a+b+3c}$

A. $12\sqrt{2}-17$ **B.** $12\sqrt{2}-13$ **C.** $12\sqrt{2}-14$ **D.** $14\sqrt{2}-17$

✍**Bài làm:**

Bài 4.43: Đặt $x=a+b+2c,\ y=2a+b+c,\ z=a+b+3c$

Suy ra $a=-2x+y+z,\ b=5x-y-3z,\ c=z-x$

Bất phương trình trở thành $\frac{-8x+4y+4z}{x}+\frac{2x-y}{y}-\frac{-8x+8z}{z}\ge 12\sqrt{2}-17$

$\Leftrightarrow +\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)\ge 12\sqrt{2}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\ge 4\sqrt{2},\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\ge 8\sqrt{2}$

Cộng vế với vế lại suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Bài 4.44: Cho $x,\ y,\ z$ là các số dương thoả mãn $xyz\ge x+y+z+2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y+z$.

A.6 **B.**7 **C.**9 **D.**10

✍**Bài làm:**

Bài 4.44: Áp dụng BĐT Côsi ta có

$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow \frac{(x+y+z)^3}{27}\ge xyz$

Mặt khác $xyz\ge x+y+z$ suy ra $\frac{(x+y+z)^3}{27}\ge x+y+z+2$

Đặt $t=x+y+z,t>0$ ta có $\frac{t^3}{27}\ge t+2\Leftrightarrow t^3-27t-54\ge 0\Leftrightarrow (t-6)(t+3)^2\ge 0\Leftrightarrow t\ge 6$

Suy ra $x+y+z\ge 6$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Bài 4.45: Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}+\frac{3}{a^2b^2c^2}\ge \frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

Bài làm

Bài 4.45: Sử dụng bất đẳng thức côsi ta có $\frac{a^{11}}{bc}+abc\ge 2\sqrt{\frac{a^{11}}{bc}.abc}=2a^6$

Tương tự ta có $\frac{b^{11}}{ca}+abc\ge 2b^6$, $\frac{c^{11}}{ab}+abc\ge 2c^6$

Từ đó suy ra $\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}\ge 2(a^6+b^6+c^6)-3abc$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $2(a^6+b^6+c^6)-3abc+\frac{3}{a^2b^2c^2}\ge \frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

Hay là $3(a^6+b^6+c^6)+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\ge 9$

Bây giờ lại sử dụng bất đẳng thức côsi ta được $a^6+b^6+c^6\ge 3a^2b^2c^2$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $9a^2b^2c^2+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\ge 9$

Đặt $t = abc, t > 0$. BĐT trở thành $9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \ge 9$

Sử dụng bất đẳng thức côsi ta được

$9t^2 + \frac{6}{t^2} - 6t \ge 9t^2 + \frac{6}{t^2} - 3(t^2+1) = 6t^2 + \frac{6}{t^2} - 3 \ge 12 - 3 = 9$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 4.46: Cho x, y, z là số không âm thoatr mãn $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Giá trị lớn nhất của $P = x + y + z$.

A.3 **B.**7 **C.**9 **D.**1

Bài làm:

Bài 4.46: Từ điều kiện suy ra $x, y, z \in [0;2]$. Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$27(2-x)(2-y)(2-z) \le (2-x+2-y+2-z)^3$

$\Leftrightarrow 27\left[8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz\right] \le (8-x-y-z)^3$

$\Leftrightarrow 27\left[8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + (x^2+y^2+z^2) - 4\right] \le (8-x-y-z)^3$

$\Leftrightarrow 27\left[4 - 4(x+y+z) + (x+y+z)^2\right] \le (8-x-y-z)^3$

Đặt $t = x+y+z,\ t \ge 0$ ta có

$\Leftrightarrow 27(t^2 - 4t + 4) \le (6-t)^3 \Leftrightarrow t^3 + 9t^2 - 108 \le 0$

$\Leftrightarrow (t-3)(t+6)^2 \le 0 \Leftrightarrow t \le 3$

Suy ra $x + y + z \le 3$.

Bài 4.47: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

A. $\min P = -2\sqrt{2}$, $\max P = 2\sqrt{2}$. **B.** $\min P = -4\sqrt{2}$, $\max P = 4\sqrt{2}$. **C.** $\min P = -3\sqrt{2}$, $\max P = 3\sqrt{2}$. **D.** $\min P = -5\sqrt{2}$, $\max P = 5\sqrt{2}$.

Bài làm:

Bài 4.47: Giả thiết của bài toán và P là những đa thức đối xứng ba biến nên ta biểu diễn các đa thức này qua ba đa thức đối xứng cơ bản $x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Suy ra:

$$|P| = |(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)| = \left|(x+y+z)(2 - \frac{(x+y+z)^2 - 2}{2})\right|$$

Đặt $t = |x+y+z|, t \ge 0$ suy ra $|P| = t(2 - \frac{t^2-2}{2}) = -\frac{t^3}{2} + 3t$.

Ta sẽ đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow t^3+4\sqrt{2}\ge 6t$

Thật vậy theo BĐT côsi ta có $t^3+4\sqrt{2}=t^3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ge 3\sqrt{t^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}}=6t$

Do đó $|P|\le 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\sqrt{2}$.

Ta có $P=2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x=\sqrt{2}$, $y=z=0$, $P=-2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x=-\sqrt{2}$, $y=z=0$,

Vậy $\min P=-2\sqrt{2}$, $\max P=2\sqrt{2}$.

Nhận xét :

1) Việc chúng biết phải đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t\le 2\sqrt{2}$ là do chúng ta dự đoán được dấu bằng xảy ra tại biên.

2) Ta có mọi đa thức đối xứng ba ẩn luôn biểu diễn qua được các đa thức đối xứng sơ cấp $a=x+y+z;b=xy+yz+zx;c=xyz$. Hơn nữa giữa ba đa thức đối xứng sơ cấp này luôn có sự đánh giá qua lại giữa chúng, cụ thể $a^2\ge 3b\ge 9\sqrt[3]{c^2}$. Với bài toán trên từ giả thiết ta có: $a^2-2b=2\Leftrightarrow b=\frac{a^2-2}{2}$ tức là ta đã thay thế b bởi a do đó khi biểu diễn $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ thì chỉ còn hai biến là a và c. Mặt khác ta luôn đánh giá được c qua a (hoặc a qua c) và lúc đó trong P chỉ còn một biến là a hoặc c.

Bài 4.48: Cho $x,y,z\in(0;1)$ và $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+z^2$

A. $\frac{3}{4}$ **B.**1 **C.**2 **D.**3

Bài làm:

Bài 4.48: Ta có $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)\Leftrightarrow 1-(x+y+z)+xy+yz+zx=2xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4xyz$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\ge xyz$ nên

$$x^2+y^2+z^2\ge 2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

Đặt $t=x+y+z$ thì $0<t<3$. Khi đó:

$$x^2+y^2+z^2\ge -\frac{4}{27}t^3+t^2-2t+2=\frac{1}{27}(2t-3)^2(\frac{15}{4}-t)+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{3}{2}$ hay $x=y=z=\frac{1}{2}$. ĐPCM

Cho $x,y\in R$ và $x,y>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$.

Đặt $t=x+y;\ t>2$. ta có $xy\le\frac{t^2}{4}$.

$P=\dfrac{t^3-t^2-xy(3t-2)}{xy-t+1}$. Do $3t-2>0$ và $-xy\ge -\dfrac{t^2}{4}$ nên ta có

$$P\ge \dfrac{t^3-t^2-\dfrac{t^2(3t-2)}{4}}{\dfrac{t^2}{4}-t+1}=\dfrac{t^2}{t-2}=t-2+\dfrac{4}{t-2}+4\ge 8$$

$\min P=\min\limits_{(2;+\infty)} f(t)=f(4)=8$ đạt được khi $\begin{cases}x+y=4\\xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.

Bài 4.49: Cho các số thực x,y thỏa $x\ne -2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\dfrac{(2x^2+13y^2-xy)^2-6xy+9}{(x+2y)^2}$.

A.5 **B.**2 **C.**3 **D.**6

Bài làm:

Bài 4.49: Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P\ge \dfrac{6(2x^2+13y^2-xy)-6xy}{(x+2y)^2}=6.\dfrac{2x^2+13y^2-2xy}{(x+2y)^2}=6.Q$$

Rõ ràng $y\ne 0$ ta có $Q=\dfrac{2t^2-2t+13}{(t+2)^2}$, $t=\dfrac{x}{y}$

Xét $Q-1=\dfrac{(t-3)^2}{(t+2)^2}\ge 0\Rightarrow Q\ge 1\Rightarrow P\ge 6$

Suy ra $\min P=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 3\sqrt{\dfrac{3}{28}}\\y=\pm\sqrt{\dfrac{3}{28}}\end{cases}$.

Bài 4.50 Cho *a*,*b*,*c* là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của : $P=a+ab+2abc$

A.5 **B.**$\dfrac{9}{2}$ **C.**3 **D.**6

Bài làm:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $xy\le\dfrac{(x-y)^2}{4}$ ta có

$$b+2abc=2a.b\left(c+\dfrac{1}{2}\right)\le 2a.\dfrac{\left(b+c+\dfrac{1}{2}\right)^2}{4}=2a.\dfrac{\left(3-a+\dfrac{1}{2}\right)^2}{4}=\dfrac{a(7-2a)^2}{8}$$

Do đó, chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$a+\dfrac{a(7-2a)^2}{8}\le\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow\ (4-a)(2a-3)^2\ge 0$ (Luôn đúng với $0\le a\le 3$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$

DẠNG 4: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\ge0\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge0$

$\Leftrightarrow(a-b)^2(a+b)\ge0$ (đúng với mọi $a>0,b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a\Leftrightarrow\frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}$, $\frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$**,** đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$

Tương tự : $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)}$; $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a,b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2+1\ge3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le(a+b)^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2+1 \ge \frac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2+24(a+b)+16 \ge 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2+24(a+b)+16 \ge 0 \Leftrightarrow (3a+3b+4)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-\frac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab \le 0$.

Xét $ab > 0$. Áp dụng BĐT $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2 = 16ab\left[2ab(a^2+b^2)\right]^2 \le 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = (a+b)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \le (a+b)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2+b^2=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{2a^3+a+1}{a^2}-2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Ta có $(a^2+b^2)(1+4)=25 \ge (a+2b)^2 \Leftrightarrow a+2b \le 5$

Suy ra $-2b \ge a-5$

Do đó $P=\frac{2a^3+a+1}{a^2}-2b \ge \frac{2a^3+a+1}{a^2}+a-5=3a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+\frac{1}{a} \ge 2,\ a+a+\frac{1}{a^2} \ge 3$

Do đó $3a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2} \ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy sa $P \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1,\ b=2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a=1,\ b=2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho $2n$ số $a_1, a_2, .., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2).$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 3$

b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ này hai lần ta có :

$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge$

$\ge ab.bc+bc.ca+ca.ab=abc(a+b+c)=3abc$ (vì $a+b+c=3$)

Suy ra $\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}\ge 3$ hay $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{3}{abc}\ge a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$ (*)

Lại áp dụng $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$ (ví dụ 1) ta có

$\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)\Rightarrow abc\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{9}$ (**)

Áp dụng bất đẳng thức $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\le\frac{1}{9}\left(\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\right)^3=3$

Vậy BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

b) $\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}$

lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l}a+b\ge 2\sqrt{ab}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

a) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})\le\frac{1}{16}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Tương tự ta có $\frac{1}{a+2b+c}\le\frac{1}{16}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c})$; $\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{16}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c})$

Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+b+2c}\ge\frac{4}{2a+4b+2c}=\frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{2a+b+c}\ge\frac{2}{a+b+2c};\ \frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{2}{2a+b+c}$$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\le\frac{3}{4}$.

b) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (*) . Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

a) Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}\le\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 3-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{4}.$$

Áp dụng BĐT (*) ta có $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{a+b+c+3}=\frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác : $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=9$$

Suy ra : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9+21=30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là các số thuộc $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{2}{4b^4+5}+\frac{3}{4c^4+5}=\frac{6}{7}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=ab^2c^3$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với x,y thuộc $[0,1]$, ta luôn có $\frac{1}{4x^4+5}+\frac{1}{4y^4+5}\le\frac{2}{4x^2y^2+5}$ (*)

Thật vậy, BĐT (*)

$$\Leftrightarrow\left(2x^4+2y^4+5\right)\left(4x^2y^2+5\right)\le\left(4x^4+5\right)\left(4y^4+5\right)$$

$$\Leftrightarrow 8x^4y^4-10x^2y^2+\left(x^4+y^4\right)\left(5-4x^2y^2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow(5-4x^2y^2)(x^2-y^2)^2\ge 0$ (đúng với $x,y\in[0,1]$)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{1}{4c^4+5}\le\frac{2}{4a^2c^2+5}$, $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{4c^4+5}\le\frac{2}{4b^2c^2+5}$

Suy ra $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{1}{4b^4+5}+\frac{2}{4c^4+5}\le\frac{2}{4a^2c^2+5}+\frac{2}{4b^2c^2+5}\le\frac{4}{4abc^2+5}$ (1)

Và $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{7}\le\frac{2}{4.\frac{b^2}{\sqrt{2}}+5}$, $\frac{1}{c^4+5}+\frac{1}{7}\le\frac{2}{4.\frac{c^2}{\sqrt{2}}+5}$

Suy ra $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{4c^4+5}+\frac{2}{7}\le\frac{2}{4.\frac{b^2}{\sqrt{2}}+5}+\frac{2}{4.\frac{c^2}{\sqrt{2}}+5}\le\frac{4}{4.\frac{bc}{\sqrt{2}}+5}$ (2)

Ta lại có $\frac{4}{4abc^2+5}+\frac{4}{4.\frac{bc}{\sqrt{2}}+5}\le\frac{8}{4.\sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{2}{4b^4+5}+\frac{3}{4c^4+5}+\frac{2}{7}\le\frac{8}{4.\sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$

Kết hợp giả thiết suy ra $\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5} \ge \dfrac{8}{7} \Rightarrow ab^2c^3 \le \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.50: Cho *a*, *b*, *x*, *y* $\in R$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2} \qquad (1)$$

Bài làm: Bình phương 2 vế ta được: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \ge ab+xy$ (*)

• Nếu $ab+xy<0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

• Nếu $ab+xy \ge 0$ thì bình phương 2 vế ta được: (*) $\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \ge 0$ (đúng).

Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho a, b ≥ 0 thoả $a+b=1$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}$.

A. $\sqrt{5}$ **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$.

A. $\dfrac{17}{2}$ **B.** $\sqrt{17}$ **C.** 1 **D.** 54

c) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}.$$

A. $\sqrt{82}$ **B.** $\sqrt{12}$ **C.** 1 **D.** 4

d) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\sqrt{223+x^2}+\sqrt{223+y^2}+\sqrt{223+z^2}$.

A. $\sqrt{2010}$ **B.** 2010 **C.** 232 **D.** 12

Bài làm:

Bài 4.50: Bình phương 2 vế ta được: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \ge ab+xy$ (*)

• Nếu $ab+xy<0$ thì (*) hiển nhiên đúng.

• Nếu $ab+xy \ge 0$ thì bình phương 2 vế ta được: (*) $\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \ge 0$ (đúng).

a) Sử dụng (1). Ta có: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \ge \sqrt{(1+1)^2+(a+b)^2}=\sqrt{5}$.

b) Sử dụng (1). $P \geq \sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} \geq \sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{4}{a+b}\right)^2} = \sqrt{17}$

Chú ý: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với a, b > 0).

c) Áp dụng (1) liên tiếp hai lần ta được:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2} = \sqrt{82}.$$

Chú ý: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ (với x, y, z > 0).

d) Tương tự câu c). Ta có: $P \geq \sqrt{\left(3\sqrt{223}\right)^2+(x+y+z)^2} = \sqrt{2010}$.

Bài 4.51: Cho a, b dương. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$; với a, b, c > 0.

b) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)$; với a, b, c > 0.

c) Cho a, b, c > 0 thoả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \leq 1$

d) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với a, b, c > 0.

e) Cho x, y, z dương thoả mãn $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y}+\frac{8yz}{2y+4z}+\frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

f) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Bài làm

Bài 4.51: a) Áp dụng (1) ba lần ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$; $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$; $\frac{1}{c}+\frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

b) Tương tự câu a).

c) Áp dụng a) và b) ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 4\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)$.

d) Theo (1): $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{ab}{a+b}\le\frac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các BĐT tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.

e) Áp dụng câu d) với $a=x,\ b=2y,\ c=4z$ thì $a+b+c=12\Rightarrow$ đpcm.

f) Nhận xét: $(p-a)+(p-b)=2p-(a+b)=c$.

Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 4.52: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$ với a,b,c dương

b) $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\le\frac{3}{4}$. Với a,b,c dương thoả $a+b+c=1$.

c) $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge9$. Với a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c\le1$

d) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge670$. Với a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=3$

Bài làm

Bài 4.52: Ta có: (1) $\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge9$. Dễ dàng suy từ BĐT Cô–si.

a) Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$.

$\Rightarrow VT\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}.\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$

Chú ý: $(a+b+c)^2\le3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$P=\frac{x+1-1}{x+1}+\frac{y+1-1}{y+1}+\frac{z+1-1}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$

Ta có: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{x+y+z+3}=\frac{9}{4}$. Suy ra: $P\le3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

c) Ta có: $P\ge\frac{9}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge9$.

d) Ta có $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge1$

và $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ nên $\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge\frac{3.2007}{(a+b+c)^2}\ge 669$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.53: Cho $a,b,c\ge 0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng : $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ac}\le 1$.

Bài làm

Bài 4.53: Ta có : $a^5+b^5\ge a^3b^2+b^3a^2=a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\ge ab\frac{a+b+c}{c}$

$\Rightarrow\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{ab\frac{a+b+c}{c}}=\frac{c}{a+b+c}$.

Tương tự : $\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{ca}{c^5+a^5+ac}\le\frac{b}{a+b+c}$

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

Bài 4.54: Cho ba số thực không âm $a,\ b,\ c$ và không có hai số đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

A. $\min P=6$ **B.** $\min P=7$ **C.** $\min P=8$ **D.** $\min P=12$

Bài 4.54: * Trước tiên, ta sẽ chứng minh kết quả sau: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ (1)

Nhân hai vế của (1) với $ab+bc+ca$, và để ý rằng $\frac{a}{b+c}.(ab+bc+ca)=\frac{a}{b+c}\left[a(b+c)+bc\right]=a^2+\frac{abc}{b+c}$

Dễ thấy khi đó, (1) trở thành $a^2+\frac{abc}{b+c}+b^2+\frac{abc}{c+a}+c^2+\frac{abc}{a+b}\ge a^2+b^2+c^2$

Hay $abc\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 0$ (hiển nhiên đúng). Điều phải chứng minh.

* Quay trở lại bài toán, sử dụng kết quả trên, ta suy ra $P\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}=t^2+\frac{4\sqrt{2}}{t}$,

với $t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$

Với cách đặt trên, dễ dàng suy ra $t\ge 1$.

Vậy ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)=t^2+\frac{4\sqrt{2}}{t}$ với $t\ge 1$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $f(t)=t^2+\frac{2\sqrt{2}}{t}+\frac{2\sqrt{2}}{t}\ge 3\sqrt[3]{t^2.\frac{2\sqrt{2}}{t}.\frac{2\sqrt{2}}{t}}=6$

Đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}$ hay $a=b>0,\ c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Vậy $\min P=6$ khi và chỉ khi $a=b>0,\ c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

TỔNG HỢP LẦN 1

Bài 1. Nếu $a > b$ và $c > d$. thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac > bd$. **B.** $a - c > b - d$. **C.** $a - d > b - c$. **D.** $-ac > -bd$.

Bài 2. Nếu $m > 0$, $n < 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $m > -n$. **B.** $n - m < 0$. **C.** $-m > -n$. **D.** $m - n < 0$.

Bài 3. Nếu a, b và c là các số bất kì và $a > b$ thì bất đẳng nào sau đây đúng?

A. $ac > bc$. **B.** $a^2 < b^2$. **C.** $a + c > b + c$. **D.** $c - a > c - b$.

Bài 4. Nếu $a > b$ và $c > d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. **B.** $a - c > b - d$. **C.** $ac > bd$. **D.** $a + c > b + d$.

Bài 5. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a?

A. $6a > 3a$. **B.** $3a > 6a$. **C.** $6 - 3a > 3 - 6a$. **D.** $6 + a > 3 + a$.

Bài 6. Nếu a, b, c là các số bất kì và $a < b$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $3a + 2c < 3b + 2c$. **B.** $a^2 < b^2$. **C.** $ac > bc$. **D.** $ac < bc$.

Bài 7. Nếu $a > b > 0$, $c > d > 0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $ac > bc$. **B.** $a - c > b - d$. **C.** $a^2 > b^2$. **D.** $ac > bd$.

Bài 8. Nếu $a > b > 0$, $c > d > 0$. thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a + c > b + d$. **B.** $ac > bd$. **C.** $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. **D.** $\frac{a}{b} > \frac{d}{c}$.

Bài 9. Sắp xếp ba số $\sqrt{6} + \sqrt{13}$, $\sqrt{19}$ và $\sqrt{3} + \sqrt{16}$ theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là

A. $\sqrt{19}, \sqrt{3} + \sqrt{16}, \sqrt{6} + \sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3} + \sqrt{16}, \sqrt{19}, \sqrt{6} + \sqrt{13}$.

C. $\sqrt{19}, \sqrt{6} + \sqrt{13}, \sqrt{3} + \sqrt{16}$. **D.** $\sqrt{6} + \sqrt{13}, \sqrt{3} + \sqrt{16}, \sqrt{19}$.

Bài 10. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a > -3b$. **B.** $a^2 > b^2$. **C.** $2a > 2b$. **D.** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Bài 11. Nếu $2a > 2b$ và $-3b < -3c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a < c$. **B.** $a > c$. **C.** $-3a > -3c$. **D.** $a^2 > c^2$.

Bài 12. Một tam giác có độ dài các cạnh là $1, 2, x$ trong đó x là số nguyên. Khi đó, x bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

KHÔNG ĐÁP ÁN

Bài 13. Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây có thể nhận giá trị âm?

A. a^2+2a+1 . **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

Bài 14. Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây luôn luôn dương.

A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

Bài 15. Trong các số $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $2+\sqrt{3}$, 4

A. số **nhỏ** nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $2+\sqrt{3}$.

B. số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là 4.

C. số **nhỏ** nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

D. số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

Bài 16. Cho hai số thực a,b sao cho $a>b$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a^4>b^4$. **B.** $-2a+1<-2b+1$. **C.** $b-a<0$. **D.** $a-2>b-2$.

Bài 17. Nếu $0<a<1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\frac{1}{a}>\sqrt{a}$. **B.** $a>\frac{1}{a}$. **C.** $a>\sqrt{a}$. **D.** $a^3>a^2$.

Bài 18. Cho a,b,c,d là các số thực trong đó $a,c\neq 0$. Nghiệm của phương trình $ax+b=0$ nhỏ hơn nghiệm của phương trình $cx+d=0$ khi và chỉ khi

A. $\frac{b}{a}<\frac{c}{d}$. **B.** $\frac{b}{a}>\frac{c}{d}$. **C.** $\frac{b}{d}>\frac{a}{c}$. **D.** $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$.

Bài 19. Nếu $a+b<a$ và $b-a>b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab>0$. **B.** $b<a$. **C.** $a<b<0$. **D.** $a>0$ và $b<0$.

Bài 20. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây **không đúng** ?

A. $a^2<ab+ac$. **B.** $ab+bc>b^2$. **C.** $b^2+c^2<a^2+2bc$. **D.** $b^2+c^2>a^2+2bc$.

Bài 21. Cho $f(x)=x-x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có **giá** trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$.

B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$.

D. $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Bài 22. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.

B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.

D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Bài 23. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2a-1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x.y$ lớn nhất

A. $a=\frac{1}{4}$. **B.** $a=\frac{1}{2}$. **C.** $a=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

Bài 24. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá **trị** nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$.
B. có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.
C. có giá trị **lớn** nhất là $\frac{3}{2}$.
D. không có giá trị lớn nhất.

Bài 25. Cho $a-b=2$. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị **nhỏ** nhất là -1 .
B. có giá trị lớn nhất là -1 .
C. có giá trị nhỏ nhất khi $a=b$.
D. không có giá trị nhỏ nhất.

Bài 26. Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S\le-\sqrt{2}$.
B. $S\ge\sqrt{2}$.
C. $-\sqrt{2}\le S\le\sqrt{2}$.
D. $-1\le S\le1$.

Bài 27. Cho x,y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2.
B. giá trị nhỏ nhất của m là 4.
C. giá trị lớn nhất của m là 2.
D. giá trị lớn nhất của m là 4.

Bài 28. Với mỗi $x>2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

A. $\frac{2}{x}$.
B. $\frac{2}{x+1}$.
C. $\frac{2}{x-1}$.
D. $\frac{x}{2}$.

Bài 29. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức x^2+3x với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$.
B. $-\frac{9}{4}$.
C. $-\frac{27}{4}$.
D. $-\frac{81}{8}$.

Bài 30. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2+3|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{9}{4}$.
B. $-\frac{3}{2}$.
C. 0 .
D. $\frac{3}{2}$.

Bài 31. Giá trị nhỏ nhất củabiểu thức $x^2-6|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. -9 .
B. -6 .
C. 0 .
D. 3 .

Bài 32. Cho biểu thức $P=-a+\sqrt{a}$ với $a\ge0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$.
B. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.
C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$.
D. P đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=\frac{1}{4}$.

Bài 33. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\frac{11}{4}$.
B. $\frac{4}{11}$.
C. $\frac{11}{8}$.
D. $\frac{8}{11}$.

Bài 34. Cho biểu thức $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.

B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Bài 35. Cho a là số thực bất kì, $P = \frac{2a}{a^2+1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a?

A. $P > -1$. **B.** $P > 1$. **C.** $P < -1$. **D.** $P \le 1$.

Bài 36. Cho $Q = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ với a, b, c là ba số thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $Q \ge 0$ chỉ đúng khi a, b, c là những số dương.

B. $Q \ge 0$ chỉ đúng khi a, b, c là những số không âm.

C. $Q > 0$. với a, b, c là những số bất kì.

D. $Q \ge 0$ với a, b, c là những số bất kì.

Bài 37. Số nguyên a lớn nhất sao cho $a^{200} < 3^{300}$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Bài 38. Điền dấu $(>, <, \ge, \le)$ thích hợp vào ô trống để được một bất đẳng thức đúng

A. Nếu a, b dương thì $\frac{ab}{a+b} \square \frac{a+b}{4}$.

B. Với a, b bất kỳ $2(a^2 - ab + b^2) \square a^2 + b^2$.

C. Nếu a, b, c dương thì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \square 1$.

Bài 39. Cho a, b là các số thực. Xét tính đúng–sai của các mệnh đề sau:

A. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge \frac{a^2+b^2}{2}$.

B. $a^2 + b^2 + 1 \ge a + b + ab$.

C. $a^2 + b^2 + 9 > 3(a+b) + ab$.

Bài 40. Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a+b| = |a| + |b|$. **B.** $|a+b| \le |a| + |b|$. **C.** $|a+b| < |a| + |b|$. **D.** $|a+b| > |a| + |b|$.

Bài 41. Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|-ab| < |a|.|b|$. **B.** $\left|\frac{a}{b}\right| > \frac{|a|}{|-b|}$ với $b \ne 0$.

C. Nếu $|a| < |b|$ thì $a^2 < b^2$. **D.** $|a-b| > |a| - |b|$.

Bài 42. Cho hai số thực a, b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a-b| \le |a| + |b|$. **B.** $|a-b| = |a| + |b|$.

C. $|a-b| = |a| - |b|$. **D.** $|a-b| > |a| - |b|$.

Bài 43. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực x?

A. $|x| > x$. **B.** $|x| > -x$. **C.** $|x|^2 > x^2$. **D.** $|x| \ge x$.

Bài 44. Nếu a, b là những số thực và $|a| \le |b|$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a^2 \le b^2$. **B.** $\frac{1}{|a|} \le \frac{1}{|b|}$ với $ab \ne 0$.

C. $-b \le a \le b$. **D.** $a \le b$.

Bài 45. Cho $a > 0$. Nếu $x < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $|x| < a$. **B.** $-x \le |x|$. **C.** $|x| < |a|$. **D.** $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{a}$.

Bài 46. Nếu $|x| < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $x < -a$. **B.** $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$. **C.** $-|x| < -a$. **D.** $x < a$.

Bài 47. Cho $a \ge 1, b \ge 1$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng** ?

A. $a \ge 2\sqrt{a-1}$. **B.** $ab \ge 2a\sqrt{b-1}$.

C. $ab < 2b\sqrt{a-1}$. **D.** $2\sqrt{b-1} \le b$.

Bài 48. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x}$ với $x > 0$ là

A. 4. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Bài 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Bài 50. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

A. 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Bài 51. Cho $x \ge 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

A. 2. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Bài 53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{2}$.

Bài 54. Cho a,b,c,d là các số dương. Hãy điền dấu $(>,<,\geq,\leq)$ thích hợp vào ô trống

A. Nếu $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ thì $\frac{a+b}{a}\boxed{<}\frac{c+d}{c}$.

B. Nếu $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ thì $\frac{a+b}{b}\boxed{>}\frac{c+d}{d}$.

C. $a+b+c\boxed{\geq}\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

D. $2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\boxed{\leq}2ab+a+b$.

Bài 55. Điền số thích hợp vào chỗ chấm để được mệnh đề đúng

A. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ với $1\leq x\leq 3$ là.... $2\sqrt{2}$ khi $x=2$ …………..

B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2-5x+1$ là …… $-\frac{17}{8}$ khi $x=\frac{5}{4}$ ………

Bài 56. Cho $a^2+b^2+c^2=1$. Hãy xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $ab+bc+ca\geq 0$. Sai

B. $ab+bc+ca\geq -\frac{1}{2}$. Đúng

C. $ab+bc+ca<1$. Sai

D. $ab+bc+ca\leq 1$. Đúng

TỔNG HỢP LẦN 2

Bài 57. Tìm mệnh đề đúng?

A. $a<b\Rightarrow ac<bc$.

B. $a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

C. $a<b\vee c<d\Rightarrow ac<bd$

D. $a<b\Rightarrow ac<bc,(c>0)$.

Bài 58. Suy luận nào sau đây đúng

A. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow ac>bd$.

B. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

C. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a-c>b-d$.

D. $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow ac>bd$.

Bài 59. Bất đẳng thức $(m+n)^2\geq 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây

A. $n(m-1)^2-m(n-1)^2\geq 0$.

B. $m^2+n^2\geq 2mn$.

C. $(m+n)^2+m-n\geq 0$.

D. $(m-n)^2\geq 2mn$.

Bài 60. Với mọi $a,b\neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a-b<0$. **B.** $a^2-ab+b^2<0$. **C.** $a^2+ab+b^2>0$. **D.** $a-b>0$.

Bài 61. Với hai số x,y dương thoả $xy=36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $x+y\geq 2\sqrt{xy}=12$.

B. $x+y\geq 2xy=72$.

C. $4xy\leq x^2+y^2$.

D. $2xy<x^2+y^2$.

Bài 62. Cho hai số x,y dương thoả $x+y=12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy} \le 6$. **B.** $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 36$.

C. $2xy < x^2 + y^2$. **D.** $\sqrt{xy} \ge 6$.

Bài 63. Cho x, y là hai số thực bất kỳ thỏa và $xy = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Bài 64. Cho $a > b > 0$ và $x = \frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y = \frac{1+b}{1+b+b^2}$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x > y$. **B.** $x < y$.

C. $x = y$. **D.** Không so sánh được.

Bài 65. Cho các bất đẳng thức: (I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ (II) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$ (III) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$ (với *a*, *b*, *c* > *0*). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

A. chỉ I đúng. **B.** chỉ II đúng. **C.** chỉ III đúng. **D.** I, II, III đều đúng.

Bài 66. Với $a, b, c > 0$. Biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < P < \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2} < P$. **C.** $\frac{4}{3} \le P$. **D.** $\frac{3}{2} \le P$.

Bài 67. Cho $a, b > 0$ và $ab > a + b$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a + b = 4$. **B.** $a + b > 4$. **C.** $a + b < 4$. **D.** $a + b \le 4$.

Bài 68. Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x < y < z$. **B.** $y < x < z$. **C.** $z < x < y$. **D.** $x < z < y$.

Bài 69. Với $a, b, c, d > 0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề **sai?**

A. $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

B. $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

C. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} > \frac{c}{d}$.

D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Bài 70. Hai số a, b thoả bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a < b$. **B.** $a > b$. **C.** $a = b$. **D.** $a \ne b$.

Bài 71. Cho $x, y, z > 0$ và xét ba bất đẳng thức

(I) $x^3 + y^3 + z^3 \ge 3xyz$ (II) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{9}{x+y+z}$ (III) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3$. Bất đẳng thức nào là đúng?

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ I và III đúng. **C.** Chỉ III đúng. **D.** Cả ba đều đúng.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

TOÁN 10

CHƯƠNG IV. ĐẠI CƯƠNG BẤT PHƯƠNG TRÌNH và HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬT NHẤT HAI ẨN

BIÊN SOẠN VÀ TỔNG HỢP

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Email: baovuong7279@gmail.com

§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa bất phương trình một ẩn

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$, $f(x) \ge g(x)$ được gọi là ***bất phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của bất phương trình.

$x_0 \in D$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu $f(x_0) < g(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm(hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

Chú ý : Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác đinh D của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in D$. Điều kiện đó gọi là điều kiện xác định của bất phương trình, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

2. Bất phương trình tương đương, biến đổi tương đương các bất phương trình.

a) Định nghĩa: **Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là** *tương đương* **nếu chúng có cùng tập nghiệm.**

Kí hiệu: Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) Định lý và hệ quả:

Định lý 1: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D. Khi đó trên D, Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình sau

1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

2) $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$

3) $f(x).h(x) > g(x).h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in D$

Hệ quả: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D. Khi đó

1) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^3(x) < g^3(x)$

2) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$ với $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0, \forall x \in D$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.

- Đối với việc giải bất phương trình ta thường thực hiện phép biến đổi tương đương nên cần lưu ý tới điều kiện để thực hiện phép biến đổi tương đương đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

1. Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của bất phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x)$, $g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)

- Điều kiện để biểu thức

- $\sqrt{f(x)}$ xác định là $f(x) \ge 0$
- $\frac{1}{f(x)}$ xác định là $f(x) \ne 0$
- $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định là $f(x) > 0$

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $x + \frac{5}{4x^2 - 9} < 1$

A. $x \ne \pm\frac{3}{2}$ **B.** $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **C.** $x = \frac{3}{2}$ **D.** $\mathbb{R}$

b) $\sqrt{4 - 2x} \ge \frac{x+1}{x^2 - 2x - 1}$

A. $\begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 1 - \sqrt{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x > 2 \\ x \ne 1 - \sqrt{2} \end{cases}$ **C.** $x \le 2$ **D.** $x \ne 1 - \sqrt{2}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $4x^2 - 9 \ne 0 \Leftrightarrow x^2 \ne \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \ne \pm\frac{3}{2}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$$\begin{cases} 4 - 2x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{3-x}+3$

b) $\sqrt{-x^2+4x-4}\le 27-3x^3$

c) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}<\frac{1}{\sqrt{x-2}}+2$

d) $\sqrt{(x-1)^2(3-4x)}-5x>\sqrt{4x-3}-7$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x-3\ge 0\\3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Thử vào bất phương trình thấy $x=3$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S=\{3\}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$-x^2+4x-4\ge 0\Leftrightarrow -(x-2)^2\ge 0\Leftrightarrow x=2$

Thay $x=2$ vào thấy thỏa mãn bất phương trình

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S=\{3\}$

c) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x\ge 0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Với điều kiện đó bất phương trình tương đương với $\sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy bất phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$

d) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}(x-1)^2(3-4x)\ge 0\\4x-3\ge 0\end{cases}$ (*)

Dễ thấy $x=1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Nếu $x\ne 1$ thì (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}3-4x\ge 0\\4x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{3}{4}\\x\ge\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $x=1$ hoặc $x=\frac{3}{4}$

Thay $x=1$ hoặc $x=\frac{3}{4}$ vào bất phương trình thấy đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{1;\frac{3}{4}\right\}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.55: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $\frac{1}{x-3}<\frac{x}{x^2-6x+9}$

A. $x\neq 3$ **B.** $x=3$ **C.** $\mathbb{R}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$

b) $\sqrt{x-2}>\frac{1}{x+2}$

A. $x\geq 2$ **B.** $x>2$ **C.** $x<2$ **D.** $x\neq -2$

Bài 4.55: a) $x\neq 3$ b) $x>2$

Bài 4.56: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x+\sqrt{2x-1}\geq 2\sqrt{1-2x}+1$

A. $x=\frac{1}{2}$ **B.** $x>\frac{1}{2}$ **C.** $x\geq\frac{1}{2}$ **D.** $x\leq\frac{1}{2}$

b) $\sqrt{-x^2+x-1}\leq 2$

A. Vô nghiệm **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x}+2$

A. $0\leq x\leq 1$ **B.** $0\leq x<1$ **C.** $0\leq x\leq 2$ **D.** $1\leq x\leq 2$

d) $\sqrt{(x-1)^2(2-x)(x-2)}>-7$

A. $x=1,x\neq 2$ **B.** $x\neq 1,x\neq 2$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ **D.** $x=1,x=2$

Bài 4.56: a) $x=\frac{1}{2}$ b) Vô nghiệm c) $0\leq x\leq 1$ d) $x=1,x=2$

DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG.

1. Phương pháp giải.

Để giải bất phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về bất phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của bất phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương bất phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế của bất phương trình với một biểu thức *luôn dương* (hoặc *luôn âm*) và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được bất phương trình *cùng chiều* (hoặc *ngược chiều*) tương đương với bất phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của bất phương trình (hai vế luôn dương) ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.
- Lập phương hai vế của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$ (*) :

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$

b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

Lời giải

Ta có $3x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$ (1) không tương đương $3x+1>0$ vì $x=3$ là nghiệm của bất phương trình (*) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow 3x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ tương đương $3x+1>0$.

Ví dụ 2: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\left|x^2+2x\right|+3\le 0$

b) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}<2$

Lời giải

a) Ta có $\left|x^2+2x\right|\ge 0\Rightarrow\left|x^2+2x\right|+3>0$ do đó bất phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ: $x>0$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=2$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $\sqrt{|x-1|}+x^2\ge 2x-1$

b) $\frac{1}{x^2+1}-(x+1)^2\le \frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

a) BPT $\Leftrightarrow \sqrt{|x-1|}+x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\ge 0$

Do $\sqrt{|x-1|}\ge 0, (x-1)^2\ge 0$ với mọi x nên $\sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\ge 0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) BPT $\Leftrightarrow -(x+1)^2\le 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\ge 0$ (đúng với mọi x)

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 4: Bạn Nam giải bất phương trình $|x+1|\ge x-1$ như sau

Bất phương trình tương đương với $(x+1)^2\ge (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1\ge x^2-2x+1 \Leftrightarrow 4x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[0;+\infty)$.

Theo em ban Nam giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Lời giải

Bạn Nam đã mắc sai lầm ở phép biến đổi bình phương hai vế

Lời giải đúng là:

- Với $x<1$ ta có $|x+1|\ge 0, x-1<0$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $x<1$
- Với $x\ge 1$: Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x\ge 1 \\ (x+1)^2\ge (x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2+2x+1\ge x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 4x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.57: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$:

$3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3}$ (I)

$3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}$ (II)

A. (I) **B.** (II) **C.** (I), (II) **D.** Không có phương trình nào cả

Bài 4.57: Ta có $3x+1>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

I) Ta có $3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -3 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne -3 \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3}$ tương đương $3x+1>0$

II) $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}$ tương đương $3x+1>0$

Bài 4.58: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\sqrt{x+1}>\sqrt{-x-4}$

b) $\sqrt{x+1}\le -x^2+x-1$

Bài 4.58: a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1>0 \\ -x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<-4 \end{cases}$ không tồn tại giá trị nào của x

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có $\sqrt{x+1}\ge 0,\ -x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Bài 4.59: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $|x+1|+2x^2-2x+1>0$

b) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$

Bài 4.59: a) Ta có $|x+1| \ge 0,\ 2x^2-2x+1=(x-1)^2+x^2 \ge 0$

Suy ra $|x+1|+2x^2-2x+1 \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1=0 \\ (x-1)^2+x^2=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra $|x+1|+2x^2-2x+1>0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}.\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2$

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài 4.60: Bạn Bình giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+2}-1\right) \ge 0$ như sau

Bất phương trình tương đương với

$\sqrt{2x+2}-1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} \ge 1 \Leftrightarrow 2x+2 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-\dfrac{1}{2};+\infty)$.

Theo em ban Bình giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Bài 4.60: Bạn Bình đã mắc sai lầm ở phép biến đổi đầu tiên

Lời giải đúng là:

$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+2}-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{2x+2}-1 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \sqrt{2x+2} \ge 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x+2 \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*

a) Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó.

• ***Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y*** là bất phương trình có một trong các dạng:

$ax+by+c<0, ax+by+c>0, ax+by+c\le 0, ax+by+c\ge 0$ trong đó *a*, *b*, *c* là những số thực đã cho, *a* và *b* không đồng thời bằng 0; *x* và *y* là các ẩn số.

Mỗi cặp số (x_0; y_0) sao cho $ax_0 + by_0 < c$ gọi là ***một nghiệm*** của bất phương trình $ax+by+c<0$,

Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax+by>c, ax+by\le c, ax+by\ge c$ cũng được định nghĩa tương tự.

• Trong mặt phẳng tọa độ thì mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là **miền nghiệm** của bất phương trình.

b) Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Định lí : Trong mặt phẳng tọa độ đường thẳng $(d): ax+by+c=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (*d*)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax+by+c>0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (*d*)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax+by+c<0$.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$, ta có quy tắc thực hành **biểu diễn hình học tập nghiệm** (hay **biểu diễn miền nghiệm**) như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng (*d*): $ax+by+c<0$

Bước 2. Xét một điểm $M(x_0;y_0)$ không nằm trên (*d*).

- Nếu $ax_0+by_0+c<0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (*d*)) chứa điểm *M* là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.
- Nếu $ax_0+by_0+c>0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (*d*)) không chứa điểm *M* là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c>0$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình dạng $ax+by+c\le 0$ hoặc $ax+by+c\ge 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*.

Trong mặt phẳng tọa độ, ta gọi tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn mọi bất phương trình trong hệ là ***miền nghiệm của hệ***. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch (tô màu) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

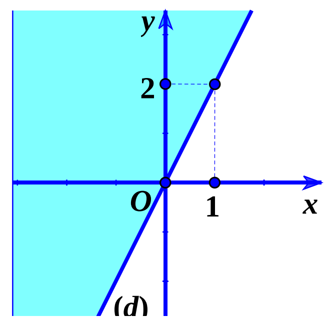
B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.**

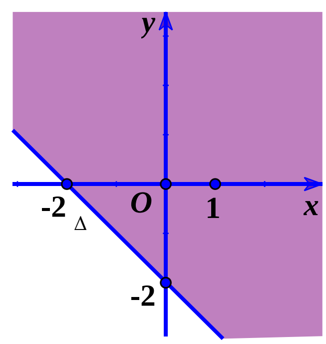
Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x-y\geq 0$ b) $\frac{x-2y}{2}>\frac{2x+y+1}{3}$

Lời giải



a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $(d):\ 2x-y=0$. Ta có (d) chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$. Ta thấy (1; 0) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (*d*) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có $\frac{x-2y}{2}>\frac{2x-y+1}{3}\Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0$

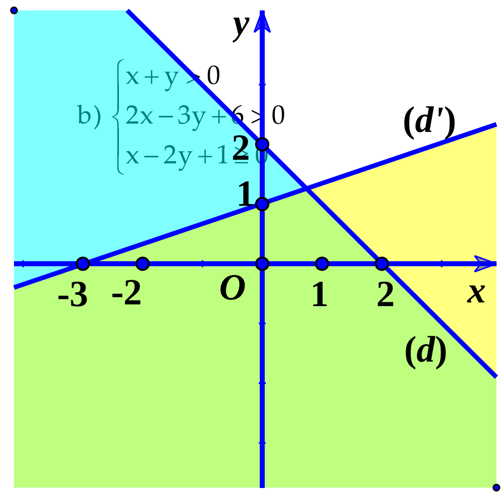
$\Leftrightarrow -x-4y-2>0\Leftrightarrow x+4y+2<0$

Trong mặt phẳng tọa độ , vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-3y+3 \leq 0 \end{cases}$

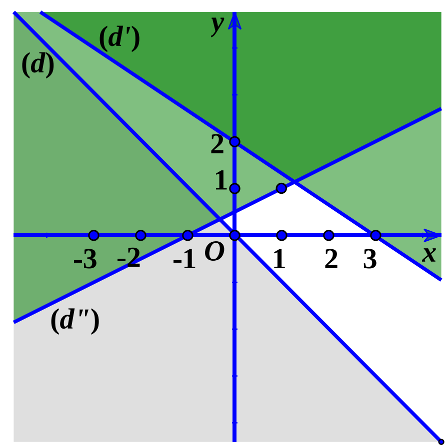


Lời giải

a) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y-2=0$, $(d'): x-3y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2 \geq 0$ và $x-3y+3 \leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d) và (d').

b) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y=0$, $(d'): 2x-3y+6=0$ và $(d''): x-2y+1=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy



Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1 \geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1 \geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$ ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+y>0$.

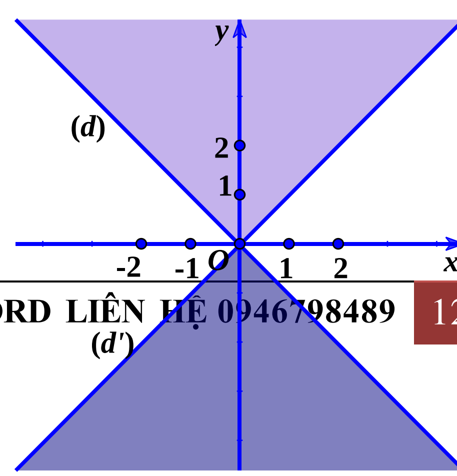
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng $(d")$

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm bất phương trình $(x-y)(x^3+y^3) \geq 0$.

Lời giải

Ta có $(x-y)(x^3+y^3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 0 \end{cases}$ (2)



Như vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $(d): x+y=0$, $(d'): x-y=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2).

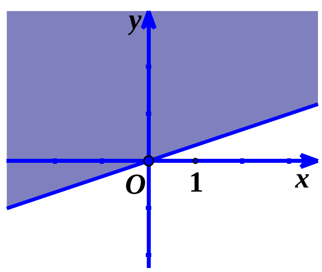
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d), (d').

3. Bài tập luyện tập.

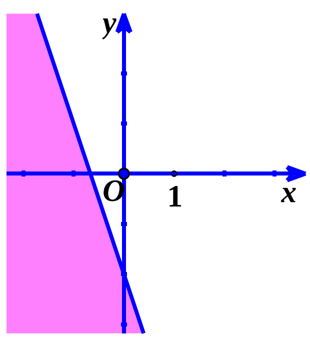
Bài 4.61: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x-3y\geq 0$

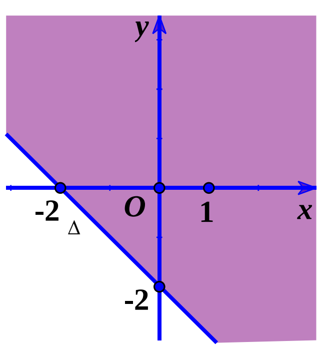
A.



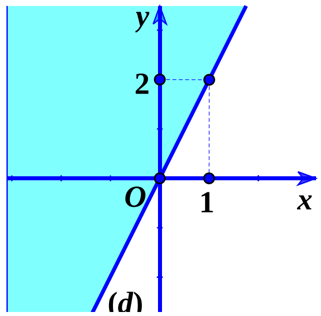
B.



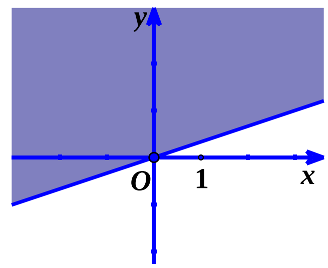
C.



D.



Bài 4.61: a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng (d): $x-3y=0$.

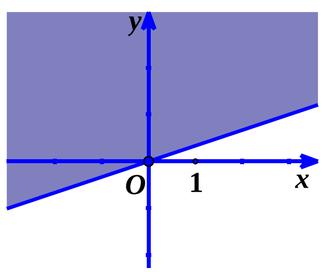


Ta thấy (1; 0) là nghiệm của bất phương trình đã cho.

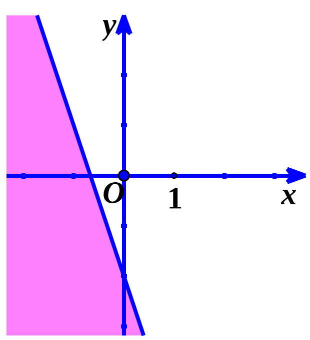
Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (*d*) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

b) $\frac{x-y}{-2}<x+y+1$

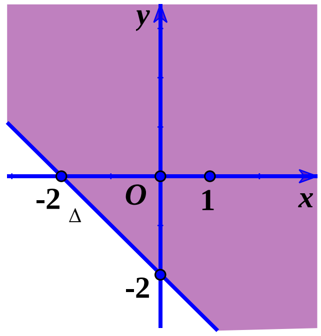
A.



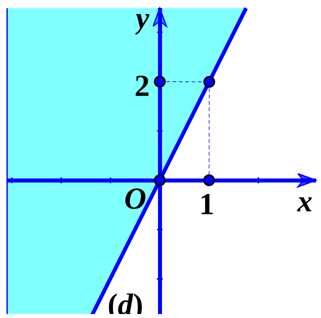
B.



C.



D.

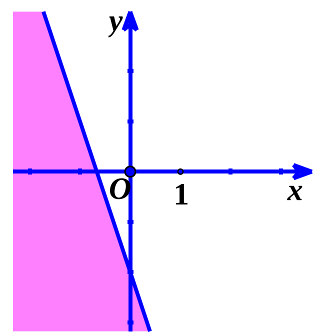


b) Ta có $\frac{x-y}{-2} < x+y+1 \Leftrightarrow x-y+2(x+y+1) > 0$

$\Leftrightarrow 3x+y+2>0$

Trong mặt phẳng tọa độ , vẽ đường thẳng $\Delta: 3x+y+2=0$

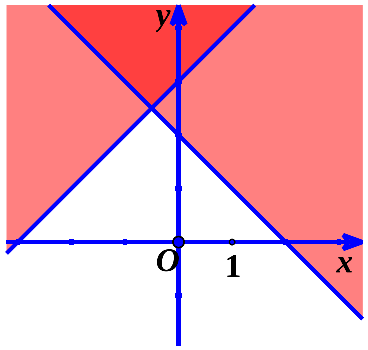
Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).



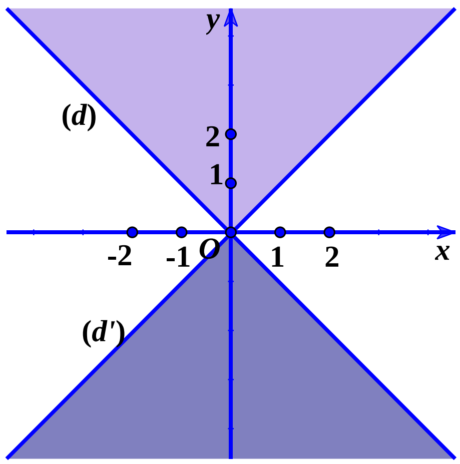
Bài 4.62: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-2<0 \\ x-y+3 \geq 0 \end{cases}$

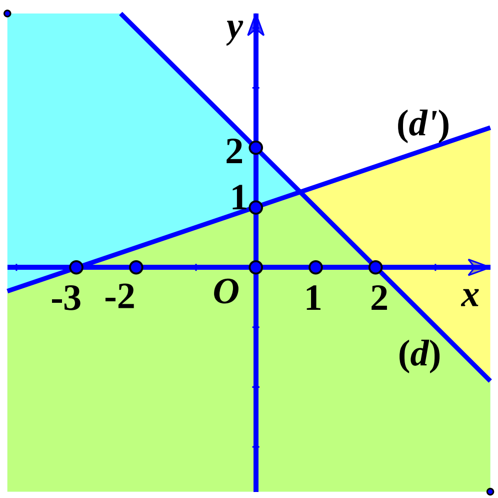
A.



B.

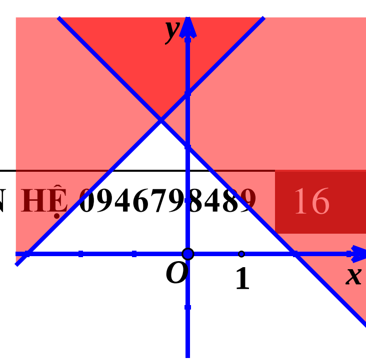


C.



D. Đáp án khác

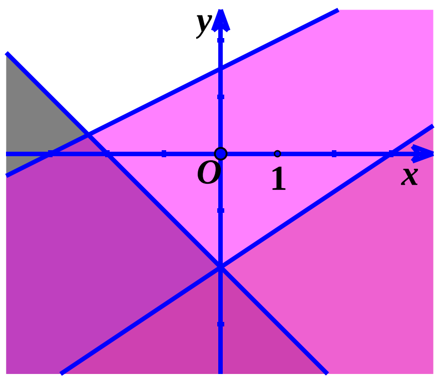
Bài 4.62: a) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y-2=0$, $(d'): x-y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy



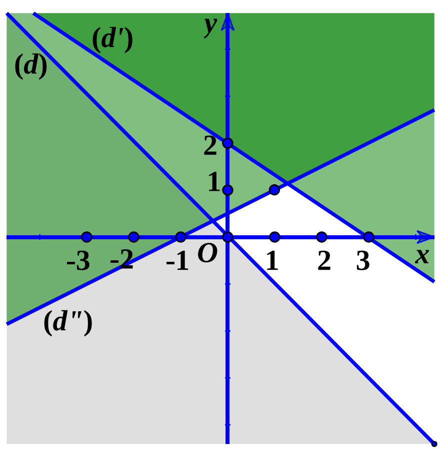
Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y-2<0$ và $x-y+3\ge 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d').

b) $\begin{cases} x+y+2>0 \\ 2x-3y-6\le 0 \\ x-2y+3\le 0 \end{cases}$

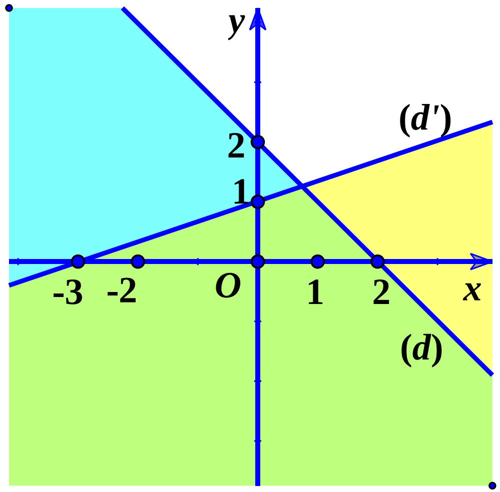
A.



B.



C.



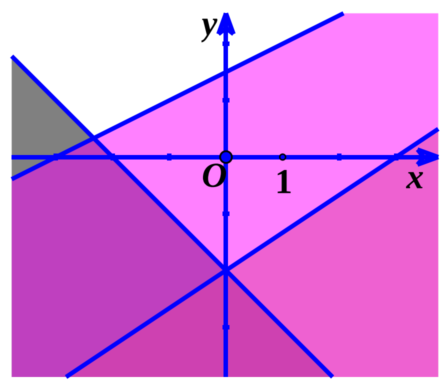
D. Đáp án khác

b) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y+2=0$, $(d'): 2x-3y-6=0$ và $(d''): x-2y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y+2>0$ và $2x-3y-6\le 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x+y+2>0$ và $2x-3y-6\le 0$.

Xét điểm $M(0;3)$ ta thấy $(0;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-2y+3\le 0$ do đó điểm $M(0;3)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x-2y+3\le 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d'), (d'').



➢ **DẠNG TOÁN 2: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ.**

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến ***quy hoạch tuyến tính***. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau "Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x;y)=ax+by\,(b\ne 0)$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác".

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6

lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút).

Chi phí cho việc này là: $800.000x + 4.000000y$ (đồng)

Mức chi này không được phép vượt qúa mức chi tối đa, tức:

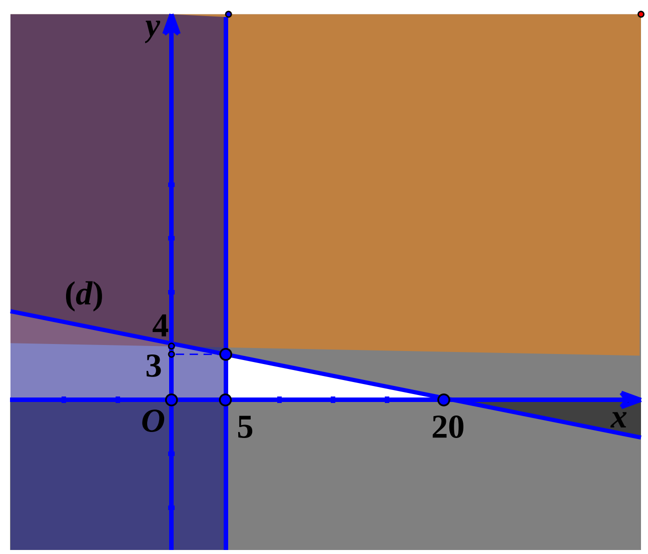
$800.000x + 4.000.000y \le 16.000.000$ hay $x + 5y - 20 \le 0$

Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có: $x \ge 5,\ y \le 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \ge 0,\ y \ge 0$. Hiệu quả chung của quảng cáo là: $x + 6y$.

Bài toán trở thành: Xác định x, y sao cho: $M(x;y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất.

Với các điều kiện $\begin{cases} x + 5y - 20 \le 0 \\ x \ge 5 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ (*)



Trước tiên ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$(d): x + 5y - 20 = 0,\ (d'): x = 5,\ (d''): y = 4$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng(tam giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $M(x;y) = x + 6y$ đạt tại một trong các điểm $(5;3), (5;0), (20;0)$

Ta có $M(5;3) = 23,\ M(5;0) = 5,\ M(20;0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi $x\,(x \ge 0)$ là số kg loại I cần sản xuất, $y\,(y \ge 0)$ là số kg loại II cần sản xuất.

Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x+4y$, thời gian là $30x+15y$ có mức lời là $40000x+30000y$

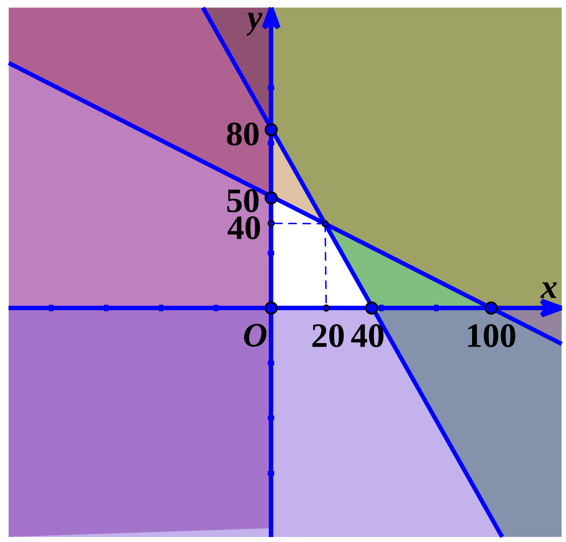
Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc suy ra $2x+4y \le 200$ hay $x+2y-100 \le 0$, $30x + 15y \le 1200$ hay $2x+y-80 \le 0$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x+2y-100 \le 0 \\ 2x+y-80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ (*) sao cho $L(x;y) = 40000x+30000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$(d): x+2y-100=0$, $(d'): 2x+y-80=0$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng(tứ giác) không tô màu trên hình vẽ



Giá trị lớn nhất của $L(x;y) = 40000x + 30000y$ đạt tại một trong các điểm $(0;0)$, $(40;0)$, $(0;50)$, $(20;40)$. Ta có

$L(0;0)=0$, $L(40;0)=1600000$,

$L(0;50)=1500000$, $L(20;40)=2000000$ suy ra giá trị lớn nhất của $L(x;y)$ là 2000000 khi $(x;y)=(20;40)$.

Vậy cần sản xuất 20 kg sản phẩm loại I và 40 kg sản phẩm loại II để có mức lời lớn nhất.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.63: Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

A. 4 xe hiệu MITSUBISHI và 5 xe hiệu FORD

B. 4 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD

C. 4 xe hiệu MITSUBISHI và 6 xe hiệu FORD

D. 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD

Bài 4.63: Gọi x, y $(x, y \in N)$ lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê

Từ bài toán ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad (*)$$

Tổng chi phí $T(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng)

Bài toán trở thành là tìm x, y nguyên không âm thoả mãn hệ (*) sao cho $T(x, y)$ nhỏ nhất.

Từ đó ta cần thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

Bài 4.64: Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh Trăng muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường, 0,08kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường, 0,04kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng.

Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

A. 625 bánh đậu xanh và 3750 bánh dẻo

B. 628 bánh đậu xanh và 3758 bánh dẻo

C. 629 bánh đậu xanh và 3759 bánh dẻo

D. 630 bánh đậu xanh và 3760 bánh dẻo

Bài 4.64: Gọi x, y lần lượt là số cái bánh Đậu xanh, bánh Dẻo $(x, y \in N)$.

Bài toán trở thành tìm số tự nhiên x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} 6x + 7y \le 30000 \\ 2x + y \le 5000 \end{cases}$

sao cho $L = 2x + 1,8y$ lớn nhất. Từ đó ta có $\begin{cases} x = 625 \\ y = 3750 \end{cases}$ thì $L = 2x + 1,8y$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy cần 625 bánh đậu xanh và 3750 bánh dẻo thì lãi lớn nhất.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

TOÁN 10

CHƯƠNG IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH và HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬT NHẤT. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬT NHẤT

BIÊN SOẠN VÀ SƯU TẦM

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax+b<0$.

Giải bất phương trình dạng $ax+b<0$ (1)

- Nếu $a = 0$ thì bất phương trình có dạng $0.x+b<0$
- Với $b < 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \varnothing$
- Với $b \ge 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \mathbb{R}$
- Nếu $a > 0$ thì 1 $\Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$
- Nếu $a < 0$ thì 1 $\Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$

Các bất phương trình dạng $ax + b > 0,\ ax + b \le 0,\ ax + b \ge 0$ được giải hoàn toán tương tự

2. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Để giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn ta giải từng bất phương trình của hệ bất phương trình. Khi đó tập nghiệm của hệ bất phương trình là giao của các tập nghiệm từng bất phương trình.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax + b < 0$.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Khẳng định nào sau đây là **Sai**?

a) $mx+6 \le 2x+3m$

A. $m = 2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$).

B. $m > 2$ bất phương trình có nghiệm là $x<3$ (có tập nghiệm là $S = \ -\infty; 3\ $)

C. $m < 2$ bất phương trình có nghiệm là $x > 3$ (có tập nghiệm là $S = (3;+\infty)$)

D. Cả A, B, C đều sai

b) $x + m \quad m + x > 3x + 4$

A. $m = 2$ bất phương trình vô nghiệm

B. $m > 2$ bất phương trình có nghiệm là $x > -m - 2$

C. $m<2$ bất phương trình có nghiệm là $x < -m - 2$

D. Cả A, B, C đều sai

c) $(m^2+9)x+3 \ge m(1-6x)$

A. $m=-3$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

B. $m \ne -3$ bất phương trình có nghiệm là $x \ge \dfrac{m-3}{m+3\ ^{2}}$.

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

d) $m\left(m^2x+2\right)<x+m^2+1$

A. $m=2$ bất phương trình vô nghiệm

B. $m>1$ bât phương trình có nghiệm là $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

C. $m<1$ bât phương trình có nghiệm là $x>\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$.

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

a) Bất phương trình tương đương với $(m-2)x<3m-6$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x\le 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m>2$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{3m-6}{m-2}=3$

Với $m<2$ bât phương trình tương đương với $x>\dfrac{3m-6}{m-2}=3$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$).

$m>2$ bât phương trình có nghiệm là $x<3$ (có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;3\right)$)

$m<2$ bât phương trình có nghiệm là $x>3$ (có tập nghiệm là $S=\left(3;+\infty\right)$)

b) Bất phương trình tương đương với $\left(m-2\right)x>4-m^2$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x>0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>2$ bât phương trình tương đương với $x>\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Với $m<2$ bât phương trình tương đương với $x<\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>2$ bât phương trình có nghiệm là $x>-m-2$

$m<2$ bât phương trình có nghiệm là $x<-m-2$

c) Bất phương trình tương đương với $\left(m+3\right)^2x\ge m-3$

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\ge -6$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m\ne -3$ bât phương trình tương đương với $x\ge\dfrac{m-3}{(m+3)^2}$

Kết luận

$m=-3$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

$m\ne -3$ bât phương trình có nghiệm là $x\ge\dfrac{m-3}{\left(m+3\right)^2}$.

d) Bất phương trình tương đương với $\Leftrightarrow\left(m^3-1\right)x<m^2-2m+1$

$\Leftrightarrow(m-1)x<\dfrac{(m-1)^2}{m^2+m+1}$ (vì $m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>1$ bât phương trình tương đương với $x < \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Với $m < 1$ bât phương trình tương đương với $x > \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Kết luận

$m = 2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>1$ bât phương trình có nghiệm là $x < \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

$m < 1$ bât phương trình có nghiệm là $x > \dfrac{m-1}{m^2+m+1}$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình $m^2 - m \quad x + m < 6x - 2$ vô nghiệm.

A. $m=-2$ và $m = 3$

B. $m=-2$ và $m = 5$

C. $m=5$ và $m = 3$

D. $m = 5$ và $m=2$

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-m-6\right)x < -2-m$

Rõ ràng nếu $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=-2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x < -5$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy giá trị cần tìm là $m = -2$ và $m=3$.

Ví dụ 3. Tìm m để bất phương trình $4m^2 \quad 2x - 1 \quad \geq \quad 4m^2 + 5m + 9 \quad x - 12m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m = \dfrac{9}{4}$ **B.** $m = \dfrac{7}{4}$ **C.** $m = \dfrac{5}{4}$ **D.** $m = \dfrac{3}{4}$

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\left(4m^2-5m-9\right)x \geq 4m^2-12m$

Dễ dàng thấy nếu $4m^2 - 5m - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0x \geq 16$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = \dfrac{9}{4}$ bât phương trình trở thành $0x \geq -\dfrac{27}{4}$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm m để bất phương trình $4m^2 + 2m + 1 \;\; x - 5m \geq 3x - m - 1$ có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$.

A. $m = -2$ **B.** $m = -3$ **C.** $m = -5$ **D.** $m = -1$

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $4m^2 + 2m - 2 \;\; x \geq 4m - 1 \Leftrightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; x \geq 4m - 1$

Với $\;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ thì bất phương trình vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > \frac{1}{4} \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; > 0$ bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{1}{m+2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\frac{1}{m+2} = -1 \Leftrightarrow m = -3$ (không thỏa mãn)

Với $-2 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow (m+2)(4m-1) < 0$ bất phương trình tương đương với $x \leq \frac{1}{m+2}$ suy ra $-2 < m < \frac{1}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m < -2 \Rightarrow \;\; m + 2 \;\;\; 4m - 1 \;\; > 0$ bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{1}{m+2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[-1;+\infty)$ thì $\frac{1}{m+2} = -1 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn)

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$m - 1 \;\; x + 2m - 3 \geq 0$ (1) và $\;\; m + 1 \;\; x + m - 4 \geq 0$ (2).

A. $m = 2 \pm \sqrt{11}$ **B.** $m = -2 \pm \sqrt{12}$ **C.** $m = 2 \pm \sqrt{12}$ **D.** $m = -2 \pm \sqrt{11}$

Lời giải

* Với $m = 1$ bất phương trình (1) trở thành $0.x - 1 \geq 0$ (vô nghiệm), bất phương trình (2) trở thành $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m = -1$ bất phương trình (1) trở thành $-2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2}$, bất phương trình (2) trở thành $0.x - 5 \geq 0$ (nghiệm đúng với mọi x) do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m>1$ ta có $(1)\Leftrightarrow x\geq\frac{3-2m}{m-1}$, $2 \quad \Leftrightarrow x\geq\frac{4-m}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \frac{3-2m}{m-1}=\frac{4-m}{m+1}$

$\Leftrightarrow m^2+4m-7=0\Leftrightarrow m=-2\pm\sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m>1$ suy ra $m=-2+\sqrt{11}$.

* Với $-1<m<1$ ta có $1 \quad \Leftrightarrow x\leq\frac{3-2m}{m-1}$, $2 \quad \Leftrightarrow x\geq\frac{4-m}{m+1}$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m<-1$ ta có $1 \quad \Leftrightarrow x\leq\frac{3-2m}{m-1}$, $2 \quad \Leftrightarrow x\leq\frac{4-m}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \frac{3-2m}{m-1}=\frac{4-m}{m+1}$

$\Leftrightarrow m^2+4m-7=0\Leftrightarrow m=-2\pm\sqrt{11}$

Đối chiếu với điều kiện $m<-1$ suy ra $m=-2-\sqrt{11}$

Vậy hai bất phương trình tương đương khi $m=-2\pm\sqrt{11}$.

2. Các bài tập luyện tập.

Bài 4.66: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

a) $m(x-m)\leq x-1$.

A. Nếu: m=1 thì $0x\leq 2$ (đúng). Tập nghiệm: S=R.

B. Nếu: m>1 thì $x\leq$ m+1. Tập nghiệm: S= $-\infty; m+1]$.

C. Nếu : m<1 thì $x\geq$ m+1. Tập nghiệm: S= $[m+1;+\infty$.

D. Cả A, B, C đều sai

b) $3x+m^2\geq m(x+3)$.

A. Nếu: m=3 thì bất phương trình $0x\leq 0$: nghiệm với mọi x.

B. Nếu: m>3 thì bất phương trình có nghiệm $x\leq$ m.

C. Nếu: m<3 thì bất phương trình có nghiệm $x\geq$ m.

D. Cả A, B, C đều sai

Bài làm:

Bài 4.66: a) $m(x-m)\leq x-1\Leftrightarrow (m-1)x\leq m^2-1$

Nếu: m=1 thì $0x\leq 2$ (đúng). Tập nghiệm: S=R.

Nếu: m>1 thì $x\leq$ m+1. Tập nghiệm: S= $-\infty; m+1]$.

Nếu : m<1 thì $x \ge m+1$. Tập nghiệm: $S=[m+1;+\infty)$.

b) $3x + m^2 \ge m(x+3) \Leftrightarrow (m-3)x \le m^2 - 3m$.

Nếu: m=3 thì bất phương trình $0x \le 0$: nghiệm với mọi x.

Nếu: m>3 thì bất phương trình có nghiệm $x \le m$.

Nếu: m<3 thì bất phương trình có nghiệm $x \ge m$.

Bài 4.67: a) Tìm m để bất phương trình $mx - 2 \le x - m$ vô nghiệm.

A. $m=1$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=\varnothing$ **D.** $m=-1$

b) Tìm m để bất phương trình $m^2(x-1) \ge 9x + 3m$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m=1$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=\varnothing$ **D.** $m=-1$

Bài làm:

Bài 4.67: a) Bất phương trình tương đương với $(m-1)x \le 2-m$

Rõ ràng nếu $m \ne 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bât phương trình trở thành $0x \le 1$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Bất phương trình tương đương với $(m^2-9)x \ge m^2 + 3m$

Dễ dàng thấy nếu $m^2 - 9 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$
Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x > 18$ suy ra bất phương trình vô nghiệm
Với $m=-3$ bât phương trình trở thành $0x \ge 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3$.

Bài 4.68: Cho hàm số $f(x)=(2m+1)x-3m+2$.

a) Tìm m để phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x \in [0;1]$.

A. $\frac{2}{3} \le m \le 3$ **B.** $\frac{2}{3} \le m$ **C.** $m \le 3$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le \frac{2}{3} \end{array}\right.$

b) Tìm m để $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-1;2]$.

A. $-4 \le m$ **B.** $m \le \frac{1}{5}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge \frac{1}{5} \end{array}\right.$ **D.** $-4 \le m \le \frac{1}{5}$

Bài làm:

Bài 4.68: a) Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0;1]$ là một đoạn thẳng AB với $A(0;-3m+2)$ và $B(1;-m+3)$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên

$[0;1] \Leftrightarrow$ đoạn thẳng AB có điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow$ các điểm đầu mút A, B nằm về hai phía của Ox (có thể nằm trên Ox). Điều này có nghĩa là

$$f(0).f(1) \le 0 \Leftrightarrow (-3m+2)(-m+3) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le m \le 3.$$

b) Ta có $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-1;\ 2] \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ nằm trên Ox $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm trên Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+1 \ge 0 \\ m+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le \frac{1}{5}.$$

Bài 4.69: Tìm m để bất phương trình $m\ \ 2x-1\ \ \ge 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

A. $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m>1$ **D.** $m<1$

Bài làm:

Bài 4.69: Bất phương trình tương đương với $2m-2\ \ x \ge m+1$

Với $m=1$ thì bất phương trình vô nghiệm do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>1$ bất phương trình tương đương với $x \ge \dfrac{m+1}{2m-2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[1;+\infty)$ thì $\dfrac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn)

Với $m<1$ bất phương trình tương đương với $x \le \dfrac{m+1}{2m-2}$ suy ra $m<1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.70: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$2-m\ \ x+2m+4 \ge 0$ và $(m+1)x+m^2-4 \ge 0$.

A. $m<-1$ **B.** $-1<m<2$ **C.** $m>2$ **D.** $m=\varnothing$

Bài làm:

Bài 4.70: * Với $m=2$ bất phương trình $(2-m)x+2m+4 \ge 0$ (1) trở thành $0.x+8 \ge 0$ (nghiệm đúng với mọi x), bất phương trình $(m+1)x+m^2-4 \ge 0$ (2) trở thành $3x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$ do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m = -1$ bất phương trình (1) trở thành $3x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{2}{3}$, bất phương trình (2) trở thành $0.x-3\ge 0$ (vô nghiệm) do đó hai bất phương trình không tương đương.

* Với $m > 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $-1 < m < 2$ ta có $1 \Leftrightarrow x \ge \frac{2m+4}{m-2}$, $2 \Leftrightarrow x \ge \frac{4-m^2}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \frac{2m+4}{m-2} = \frac{4-m^2}{m+1} \Leftrightarrow m = -2$ (loại)

* Với $m < -1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy không có giá trị nào của m để hai bất phương trình tương đương.

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x-2>4x+5 \\ 5x-4<x+2 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x > 7 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$ **B.** $x>7$ **C.** $x < \frac{3}{2}$ **D.** Vô nghiệm

b) $\begin{cases} 6x+\frac{5}{7}<4x+7 \\ \frac{8x+3}{2}<2x+5 \end{cases}$

A. $x<\frac{7}{4}$ **B.** $x < \frac{22}{7}$ **C.** $x > \frac{7}{4}$ **D.** $x > \frac{22}{7}$

c) $\begin{cases} 5x-2<4x+5 \\ x^2<(x+2)^2 \end{cases}$

A. $-1 < x$ **B.** $x < 7$ **C.** $-1 < x < 7$ **D.** Vô nghiệm

d) $\begin{cases} x-1\le 2x-3 \\ 3x<x+5 \\ \frac{5-3x}{2}\le x-3 \end{cases}$

A. $\frac{11}{5} \le x \le \frac{5}{2}$ **B.** $x \ge 2$ **C.** $\frac{11}{5} \le x$ **D.** $x \le \frac{5}{2}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 5x-2>4x+5 \\ 5x-4<x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>7 \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 6x+\frac{5}{7}<4x+7 \\ \frac{8x+3}{2}<2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{22}{7} \\ x<\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x<\frac{7}{4}$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $x<\frac{7}{4}$

c) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x<7 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $-1<x<7$.

d) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x\ge 2 \\ x<\frac{5}{2} \\ x\ge\frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{5}\le x\le\frac{5}{2}$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $\frac{11}{5}\le x\le\frac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 2x-1\le x+2 \\ m\ \ m+1\ \ x+4m\ge\ \ m-2\ \ x+3m^2+6 \end{cases}$

A. $m\ge 0$ **B.** $m<0$ **C.** $m\le 0$ **D.** $m=0$

b) $\begin{cases} m(mx-1)<2 \\ m(mx-2)\ge 2m+1 \end{cases}$

A. $m > \frac{1}{3}$ **B.** $m = \frac{1}{3}$ **C.** $m \leq \frac{1}{3}$ **D.** $m < \frac{1}{3}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \leq 3 \\ m^2 + 2\ \ x \geq 3m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \dfrac{3m^2 - 4m + 6}{m^2 + 2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{3m^2 - 4m + 6}{m^2 + 2} \leq 3 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy $m \geq 0$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m + 2 \\ m^2x \geq 4m + 1 \end{cases}$

Với $m = 0$ ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0$ ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \dfrac{m + 2}{m^2} \\ x \geq \dfrac{4m + 1}{m^2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m + 2}{m^2} > \frac{4m + 1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$

Vậy $m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} (x - 3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$

A. $m < \frac{72}{13}$ **B.** $m \neq \frac{72}{13}$ **C.** $m \geq \frac{72}{13}$ **D.** $m > \frac{72}{13}$

b) $\begin{cases} mx + 1 \leq x - 1 \\ 2\ \ x - 3\ \ < 5\ \ x - 4 \end{cases}$

A. $m \geq 1$ **B.** $m > 1$ **C.** $m = 1$ **D.**Vô nghiệm

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \le \dfrac{8}{13} \\ x \ge \dfrac{2m-8}{5} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{8}{13} < \dfrac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \dfrac{72}{13}$

Vậy $m > \dfrac{72}{13}$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m-1\ \ x \le -2 \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Với $m = 1$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x \le -2 \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt vô nghiệm)

Với $m > 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \le \dfrac{-2}{m-1} \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{m-1} \le \dfrac{14}{3} \Leftrightarrow -6 \le 14(m-1) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{4}{7}$

Do đó $m > 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m < 1$ hệ bất phương trình $\begin{cases} x \ge \dfrac{-2}{m-1} \\ x > \dfrac{14}{3} \end{cases}$ (hệ bpt luôn có nghiệm)

Vậy giá trị cần tìm là $m \ge 1$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m\ \ x+1\ \ \ge x+3 \\ 4mx+3 \ge 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \dfrac{1}{4}$ **B.** $m = \dfrac{3}{4}$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = \dfrac{1}{2}$

Lời giải

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} (2m-1)x \ge 3-2m \\ (4m-4)x \ge -3 \end{cases}$

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{3-2m}{2m-1} = \dfrac{-3}{4m-4}$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$

Với $m = \dfrac{3}{4}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}-1\right)x \ge 3 - \dfrac{3}{2} \\ -x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Với $m = \frac{5}{2}$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 4x \geq -2 \\ 6x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{3}{4}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.71: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3 \\ \frac{3x+8}{4} > 2x-5 \end{cases}$

A. $-\frac{26}{3} < x < \frac{28}{5}$ **B.** $-\frac{26}{3} < x$ **C.** $x < \frac{28}{5}$ **D.** Vô nghiệm

b) $\begin{cases} \frac{4}{3} - 12x \leq x + \frac{1}{2} \\ \frac{4x-3}{2} < \frac{2-x}{3} \end{cases}$

A. $\frac{5}{78} \leq x$ **B.** $x < \frac{13}{14}$ **C.** $\frac{5}{78} \leq x < \frac{13}{14}$ **D.** Vô nghiệm

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x + \frac{4}{3} \\ \frac{2x-9}{3} \geq \frac{19+x}{2} \end{cases}$

A. $x \geq 12$ **B.** $x \geq 75$ **C.** $x > 75$ **D.** $x < 75$

d) $\begin{cases} \frac{11-x}{2} \geq 2x-5 \\ 2\ \ 3x+1 \geq \frac{x-8}{2} \end{cases}$

A. $-\frac{12}{11} \leq x \leq \frac{21}{5}$ **B.** $x \leq \frac{21}{5}$ **C.** $-\frac{12}{11} \leq x$ **D.** Vô nghiệm

✍***Bài làm:***

Bài 4.71: a) $-\frac{26}{3} < x < \frac{28}{5}$ b) $\frac{5}{78} \leq x < \frac{13}{14}$

c) $x \geq 75$ d) $-\frac{12}{11} \leq x \leq \frac{21}{5}$

Bài 4.72: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases}4\ \ x-3\ \ +1\le 3\ \ x-3\\ x+m>1\end{cases}$

A. $m>-1$ **B.** $m>-2$ **C.** $m>0$ **D.** $m>2$

b) $\begin{cases}2(x+5)<3(x+4)\\ -3x-8\ge 5(x-8)\\ m(x+2)<(m+1)x+m-2\end{cases}$

A. $m\le -2$ **B.** $m\le 2$ **C.** $m>-1$ **D.** $m<1$

✍***Bài làm:***

Bài 4.72: a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x\le 2\\ x>1-m\end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2>1-m\Leftrightarrow m>-1$

Vậy $m>-1$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x>-2\\ x\le 4\\ x>m+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x\le 4\\ x>m+2\end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$m+2\le 4\Leftrightarrow m\le -2$

Vậy $m\le -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.73: Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases}2x+7\ge 8x+1\\ m+5<2x\end{cases}$

A. $m\ge 3$ **B.** $m>-3$ **C.** $m\ge -3$ **D.** $m<-3$

b) $\begin{cases}3x+5\ge x-1\\ (x+2)^2\le (x-1)^2+9\\ mx+1>(m-2)x+m\end{cases}$

A. $m\ge 3$ **B.** $m>-3$ **C.** $m\ge -3$ **D.** $m<-3$

Bài làm:

Bài 4.73: a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \le 1 \\ x > \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 \le \dfrac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \ge -3$

Vậy $m \ge -3$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \ge -3 \\ x \le 1 \\ x > \dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ x > \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2} \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 3$

Vậy $m \ge 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.74: Tìm m để phương trình $15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7$ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x < y \\ 2m^2x + 3my < 0 \end{cases}$.

A. $-\dfrac{9}{2} < m < 0$ **B.** $m = 0$ **C.** $m \ne 0$ **D.** Vô nghiệm

Bài làm:

Bài 4.74: Ta thấy nếu $y = 0$ thì phương trình vô nghiệm

Với $y \ne 0$. Đặt $x = ty$ khi đó

$15x^2 - 11xy + 2y^2 = -7 \Leftrightarrow y^2\left(15t^2 - 11t + 2\right) = -7$

$\begin{cases} x < y \\ 2m^2x + 3my < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(t-1) < 0 \\ y(2m^2t + 3m) < 0 \end{cases}$ (*)

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 15t^2 - 11t + 2 < 0 \Leftrightarrow (3t-1)(5t-2) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < t < \dfrac{2}{5}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 2m^2t + 3m < 0 \end{cases}$

Như vậy ta cần tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < t < \dfrac{2}{5} \\ 2m^2t + 3m < 0 \end{cases}$ (**) có nghiệm với ẩn t.

Với $m = 0$ thì hệ bất phương trình (**) có nghiệm

Với $m \neq 0$ $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < t < \frac{2}{5} \\ t < -\frac{3}{2m} \end{cases}$ do đó

Hệ bất phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{3}{2m} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{9}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{9}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{9}{2} < m < 0$.

Vậy $-\frac{9}{2} < m < 0$ là những giá trị cần tìm.

DẠNG TOÁN 3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho bất phương trình tham số $\frac{mx - m + 1}{x - 1} > 0$, Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $0 < m < \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = -\infty;1 \cup \left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

B. $m = \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus 1$

C. $m > \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty;\frac{1-m}{m}\right) \cup 1;+\infty$

D. $m < 0$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \left\{2;\frac{1-m}{m}\right\}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 1$

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x > 1 \\ mx - m + 1 > 0 \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} x < 1 \\ mx - m + 1 < 0 \end{cases}$ (4)

+ TH1: $m > 0$ ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1-m}{m} \end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{1-m}{m} \end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{m} > 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x > \frac{1-m}{m}$ và (4) $\Leftrightarrow x < 1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty;1) \cup \left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

Nếu $\frac{1-m}{m} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x > 1$ và (4) $\Leftrightarrow x < 1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R} \setminus \ 1$

Nếu $\frac{1-m}{m} < 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x > 1$ và (4) $\Leftrightarrow x < \frac{1-m}{m}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty;\frac{1-m}{m}\right) \cup \ 1;+\infty$

+ TH2: $m = 0$ ta có (3) trở thành $\begin{cases} x > 1 \\ 0x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$, (4) trở thành $\begin{cases} x < 1 \\ 0x + 1 < 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \ 1;+\infty$

+ TH3: $m < 0$ ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1-m}{m} \end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1-m}{m} \end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{m} > 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x \in \left(1;\frac{1-m}{m}\right)$ và (4) $\Leftrightarrow x \in \ -\infty;1 \ \cup \left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

Suy ra với $m < 0$ nghiệm của bất phương trình là $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1;\frac{1-m}{m}\right\}$

Kết luận

$0 < m < \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = (-\infty;1) \cup \left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

$m = \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$m > \frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty;\frac{1-m}{m}\right) \cup \ 1;+\infty$

$m = 0$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \ 1;+\infty$

$m<0$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{1;\dfrac{1-m}{m}\right\}$

Ví dụ 2: Cho bất phương trình $\sqrt{(m^2-4)x-m+3}>2$.

a) Giải bất phương trình khi $m=1$

A. $S=(-\infty;-\frac{2}{3}]$ **B.** $S=\left[-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ **C.** $S=\mathbb{R}$ **D.** $S=\varnothing$

b) Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=\pm 2$ **D.**Không tồn tại m

Lời giải

a) Khi $m=1$ bất phương trình trở thành $\sqrt{-3x+2}>2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3x+2\ge 0\\ -3x+2\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow x\le -\dfrac{2}{3}$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=(-\infty;-\dfrac{2}{3}]$

b) ĐKXĐ: $(m^2-4)x-m+3\ge 0$ (*)

Giả sử bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thì khi đó (*) đúng mọi x

Suy ra $m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2$

Với $m=2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x-2+3}>2$ (vô nghiệm)

Với $m=-2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x+2+3}>2$ (đúng với mọi x)

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-2m+2)\ge 0$

a) Giải bất phương trình khi $m=2$

A. $S=\{1\}\cup[2;+\infty)$ **B.** $S=\ 1\ \cup\ -\infty;2]$

C. $S=\mathbb{R}$ **D.** $S=\varnothing$

b) Tìm m để mọi $x\in[2;3]$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $m<\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{2}<m\le 2$ **C.** $m\le 2$ **D.** $m=\dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) Khi $m=2$ bất phương trình trở thành $\sqrt{x-1}(x-2)\ge 0$

Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \begin{cases}x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x\ge 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = \ 1\ \cup [2;+\infty)$.

b) Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \begin{cases}x-1\ge 0\\ x-2m+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x\ge 2m-2\end{cases}\end{array}\right.$

+ TH1: $2m-2>1 \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2m-2\end{array}\right.$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S = \ 1\ \cup [2m-2;+\infty)$.

Do đó mọi $x\in[2;3]$ đều là nghiệm của bất phương trình (*)

$\Leftrightarrow [2;3]\subset S \Leftrightarrow 2m-2\le 2 \Leftrightarrow m\le 2$

Suy ra $\frac{3}{2}<m\le 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $2m-2=1 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge 1$

Suy ra $m=\frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $2m-2<1 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge 1$

Suy ra $m<\frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị cần tìm là $m\le 2$.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của m để

a) Bất phương trình $mx+4>0$ (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$

A. $-\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$ **B.** $m<0$ **C.** $m>0$ **D.** $-\frac{1}{2}\le m<0$

b) Bất phương trình $\frac{mx}{x^2+1}-2m-3<0$ (2) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$

A. $m\ge -\frac{3}{2}$ **B.** $m<-\frac{3}{2}$ **C.** $m>0$ **D.** $-\frac{3}{2}\le m<0$

Lời giải

a) *Cách 1:* Ta có $|x|<8 \Leftrightarrow -8<x<8 \Leftrightarrow x\in(-8;8)$

+ TH1: $m>0$ ta có (1) $\Leftrightarrow mx>-4 \Leftrightarrow x>-\frac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(-\frac{4}{m};+\infty\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi

$(-8;8)\subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m}\le -8 \Leftrightarrow m\le \frac{1}{2}$

Suy ra $0<m\le \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $m=0$ khi đó bất phương trình (1) trở thành $0.x+4>0$ (đúng với mọi x)

Do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $m<0$ ta có (1) $\Leftrightarrow mx>-4 \Leftrightarrow x<-\frac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(-\infty;-\frac{4}{m}\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi

$(-8;8)\subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m}\ge 8 \Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}$

Suy ra $-\frac{1}{2}\le m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $-\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi $mx+4>0,\ \forall x\in\ -8;8$

Xét hàm số $f\ \ x\ \ =mx+4$. Ta biết đồ thị là một đường thẳng do đó

$$f(x)=mx+4>0,\ \forall x\in\ -8;8\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(-8)\ge 0 \\ f(8)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8m+4\ge 0 \\ 8m+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{1}{2} \\ m\ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$$

Vậy $-\frac{1}{2}\le m\le \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t=\dfrac{x}{x^2+1}$ bất phương trình trở thành $mt-2m-3<0$

Với $x>0$ ta có $\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{x}{2\sqrt{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ khi đó $0<t\le\dfrac{1}{2}$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$ khi và chỉ khi bất phương trình $mt-2m-3<0$ đúng với mọi $t\in(0;\frac{1}{2}]\Leftrightarrow\begin{cases}-2m-3\le 0\\ \frac{1}{2}m-2m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-\frac{3}{2}\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$

Vậy $m\ge-\dfrac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét : Bất phương trình $f(x)=ax+b>0,\ \forall x\in\left[\alpha;\beta\right]\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)>0\\ f(\beta)>0\end{cases}$, Bất phương trình $f(x)=ax+b>0,\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)\ge 0\\ f(\beta)\ge 0\end{cases}$. Các trường hợp khác tương tự.

Ví dụ 5: Cho phương trình $(m+1)x^2-(4m+3)x+4m+1=0$ (1). Tìm m để phương trình (1)

a) Có một nghiệm lớn hơn 2 và một nghiệm nhỏ hơn 2.

A. $m>-1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m\ne-1$ **D.** Vô nghiệm

b) Có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2

A. $m=-1$ **B.** $-\dfrac{5}{4}<m<-1$ **C.** $m>-1$ **D.** $m\ge-\dfrac{5}{4}$

Lời giải

Đặt $y=x-2\Rightarrow x=y+2$ khi đó phương trình (1) trở thành

$(m+1)(y+2)^2-(4m+3)(y+2)+4m+1=0$

$\Leftrightarrow (m+1)y^2+4(m+1)y+4(m+1)-(4m+3)y-2(4m+3)+4m+1=0$

$\Leftrightarrow(m+1)y^2+y-1=0$ (2)

a) Phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2 một nghiệm nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái

+ TH1: Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0\Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

TH2: Với $m\ne-1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai do đó nó có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Vậy với $m > -1$ thì phương trình (1)

b) Ta có phương trình (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có ít nhất một nghiệm dương.

- Với $m = -1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán
- Với $m \neq -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai

+ TH1: Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4\ \ m+1\ \ > 0 \\ -\dfrac{1}{m+1} > 0 \\ -\dfrac{1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{5}{4} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < -1$$

+ TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m > -1$ (theo câu a)

+ TH3: Phương trình (2) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4(m+1)=0 \\ -\dfrac{1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{4} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{4}$$

+ TH4: Phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng không

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{m+1} > 0 \\ -\dfrac{1}{m+1} = 0 \\ 1+4(m+1) > 0 \end{cases}$$ (không tồn tại giá trị nào của m)

Vậy $m \geq -\dfrac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Để so sánh nghiệm phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với số thực α ta đặt $y = x - \alpha$ và quy về việc xét dấu nghiệm của phương trình bậc hai

2. Bài tập luyện tập

Bài 4.75: Cho bất phương trình $\dfrac{2x+m-1}{x+1} > 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $m < 3$ tập nghiệm bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1-m}{2};+\infty\right)$

B. $m = 3$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \ \ -1$

C. m > 3 tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty;\frac{1-m}{2}\right) \cup \left(-1;+\infty\right)$.

D. Cả A, B, C đều sai

Bài làm:

Bài 4.75: ĐKXĐ: $x \neq -1$

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x > -1 \\ 2x + m - 1 > 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x < -1 \\ 2x + m - 1 < 0 \end{cases}$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1-m}{2} \end{cases}$, (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{1-m}{2} \end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{2} > -1 \Leftrightarrow m < 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x > \frac{1-m}{2}$, (2) $\Leftrightarrow x < -1$

Suy ra bất phương trình có nghiệm là $x \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$

Nếu $\frac{1-m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -1$, (2) $\Leftrightarrow x < -1$

Suy ra bất phương trình có nghiệm là $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Nếu $\frac{1-m}{2} < -1 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -1$, (2) $\Leftrightarrow x < \frac{1-m}{2}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(-\infty;\frac{1-m}{2}\right) \cup (-1;+\infty)$

Kết luận

$m < 3$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty;-1\right) \cup \left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$

$m = 3$ tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

m > 3 tập nghiệm bất phương trình là $S = \left(-\infty;\frac{1-m}{2}\right) \cup \left(-1;+\infty\right)$.

Bài 4.76: Tìm điều kiện của m để phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$

a) Có hai nghiệm khác dấu

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ **B.** $m < 1$ **C.** $m \neq \frac{3}{2}$ **D.** Vô nghiệm

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ **B.** $m > 1$ **C.** $m \neq \frac{3}{2}$ **D.** Vô nghiệm

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ **B.** $m > 1$ **C.** $m \neq \frac{3}{2}$ **D.** Vô nghiệm

d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ **B.** $m > 1$ **C.** $m = \frac{1}{2}$ **D.** Vô nghiệm

Bài làm:

Bài 4.76: a) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi $P < 0$ hay $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-3)^2 > 0 \\ 1 - 2m < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3^{\ 2} > 0 \\ 1 - 2m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ không có giá trị nào của m thoả mãn}$$

d) Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau hay phương trình có hai nghiệm đối nhau .

Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Bài 4.77: Cho bất phương trình $\sqrt{4 - x}\left[\ m^2 + 1\ \ x - 5m^2\right] \leq 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $-2<m<2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x\le \dfrac{5m^2}{m^2+1} \end{array}\right.$

B. Nếu $m\le -2 \vee m\ge 2 \Leftrightarrow x\le 4$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Bài làm:

Bài 4.77: Ta có bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ \begin{cases} x<4 \\ (m^2+1)x-5m^2\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ \begin{cases} x<4 \\ x\le \dfrac{5m^2}{m^2+1} \end{cases} \end{array}\right.$ (*)

- Nếu $\dfrac{5m^2}{m^2+1}<4 \Leftrightarrow m^2<4 \Leftrightarrow -2<m<2$ ta có

(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x\le \dfrac{5m^2}{m^2+1} \end{array}\right.$

- Nếu $\dfrac{5m^2}{m^2+1}\ge 4 \Leftrightarrow m^2\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -2 \end{array}\right.: (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\le 4$

Bài 4.78:

a) Cho bất phương trình $\left(1+\dfrac{4x}{1+x^2}\right)m+\dfrac{2x}{1+x^2}<3$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$.

A. $-4<m$ **B.** $m<\dfrac{2}{3}$ **C.** $-4<m<\dfrac{2}{3}$ **D.** Vô nghiệm

b) Với điều kiện nào của a, b thì bất phương trình $a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+b\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ne 0$.

A. $a=0; b\ge 0$ **B.** $a=0; b>0$ **C.** $a=0; b=0$ **D.** $a\ne 0; b\ge 0$

Bài làm:

Bài 4.78: a) $-4<m<\dfrac{2}{3}$ b) $a=0; b\ge 0$

Bài 4.79: Tìm m để phương trình $(x^2-2x)^2-2m(x^2-2x)+m+3=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-\infty;-4) \cup \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ **B.** $m = \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

C. $m \in (-\infty;-4)$ **D.**Vô nghiệm

Bài làm:

Bài 4.79: Đặt $t = x^2 - 2x + 1$ khi đó $t \geq 0$, suy ra $x^2 - 2x = t - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được phương trình sau: $t^2 - 2(m+1)t + m + 4 = 0$ (*)

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì pt (*) có 2 nghiệm thỏa $t_1 < 0 < t_2$, hoặc phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 = t_2$.

- Phương trình (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$.
- Phương trình (2) có nghiệm $0 < t_1 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 3 = 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: với $m \in (-\infty;-4) \cup \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó.
a) Định nghĩa nhị thức bậc nhất:

Nhị thức bậc nhất (đối với x) là biểu thức dạng $ax + b$, trong đó a và b là hai số cho trước với $a \neq 0$.

$x_0 = -\frac{b}{a}$ được gọi là nghiệm cảu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$.

b) Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lí: Nhị thức bậc nhất $f\ \ x\ \ = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số a $\ x$ nhỏ hơn nghiệm của nó.

2. Một số ứng dụng.

a) Giải bất phương trình tích

- Dạng $P(x) > 0$ (1) (trong đó $P\ \ x$ là tích các nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).

b) Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (2) (trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là tích những nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

Chú ý: 1) Không nên qui đồng và khử mẫu.
2) Rút gọn bớt các nhị thức có lũy thừa bậc chẵn (cần lưu ý trong việc rút gọn để tránh làm mất nghiệm).

c) Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ)

• Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

Chú ý: Với $B>0$ ta có $|A|<B \Leftrightarrow -B<A<B$; $|A|>B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A<-B \\ A>B \end{array}\right.$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ DẠNG 1: LẬP BẢNG XÉT DẤU BIỂU THỨC CHỨA NHỊ THỨC BẬC NHẤT HAI ẨN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $-2x+3$

A.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$-$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$+$	

C.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$-$	0	$+$	

D.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

b) $4x-12$

A.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$4x-12$		$-$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$	3	$+\infty$

$4x-12$		$+$	0	$+$	

C.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$4x-12$		$-$	0	$+$	

D.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	0	$+$	

c) x^2-4

A.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$+$	0	$+$	

B.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

C.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$+$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

D.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $-2x^2+5x-2$

A.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$+$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x-2$		$+$	0	$+$	0	$-$	

C.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$+$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Lời giải

a) Ta có $-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, $a=-2<0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

b) Ta có $4x-12=0 \Leftrightarrow x=3$, $a=4>0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	0	$+$	

c) Ta có $x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$

$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

d) Ta có $-2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra $-2x^2+5x-2=-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(1-2x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ví dụ 2: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $\frac{-2x+3}{x-2}$

A.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$+$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{-2x+3}{x-2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

B.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$+$	0	$+$	
$\frac{-2x+3}{x-2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

C.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$\frac{-2x+3}{x-2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

D.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		+	0	−	|	−	
$x-2$		−	|	−	0	+	
$\frac{-2x+3}{x-2}$		−	0	+	||	−	

b) $\frac{4x-12}{x^2-4x}$

A.

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		−	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	+	0	+	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		−	||	+	0	−	||	+	

B.

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		+	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	−	0	+	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		−	||	+	0	−	||	+	

C.

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		−	|	+	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	−	0	+	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		−	||	+	0	−	||	+	

D.

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		−	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	−	0	+	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		−	||	+	0	−	||	+	

c) $x\left(4-x^2\right)(x+2)$

A.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\left(4-x^2\right)(x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$x+2$		$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\left(4-x^2\right)(x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

C.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\left(4-x^2\right)(x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\left(4-x^2\right)(x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $1-\dfrac{4x^2}{(x+1)^2}$

A.

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$		$+$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

$1-x$	+	|	+	|	+	0	−	
$x+1$	−	0	+	|	+	|	+	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$	−	||	−	0	+	0	−	

B.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$	−	|	−	0	+	|	+	
$1-x$	+	|	+	|	+	0	−	
$x+1$	−	0	+	|	+	|	+	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$	−	||	−	0	+	0	+	

C.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$	−	|	−	0	+	|	+	
$1-x$	+	|	+	|	+	0	−	
$x+1$	−	0	+	|	+	|	+	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$	+	||	+	0	+	0	−	

D.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$	−	|	−	0	+	|	+	
$1-x$	+	|	+	|	+	0	−	
$x+1$	−	0	+	|	+	|	+	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$	−	||	−	0	+	0	−	

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$	+	0	−	|	−	
$x-2$	−	|	−	0	+	
$\frac{-2x+3}{x-2}$	−	0	+	||	−	

b) Ta có $\frac{4x-12}{x^2-4x}=\frac{4x-12}{x\ \ x-4}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

c) Ta có $x\ \ 4-x^2\ \ (x+2)=x\ \ 2-x\ \ \ x+2\ ^2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\ \ 4-x^2\ \ (x+2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Ta có $1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x^2}{(x+1)^2}=\frac{(3x+1)(1-x)}{(x+1)^2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ví dụ 3: Tùy vào m xét dấu các biểu thức sau $\frac{-2x+m}{x-2}$.

A. **B.** **C.** **D.**

Lời giải

a) Ta có $x-2=0\Leftrightarrow x=2,-2x+m=0\Leftrightarrow x=\frac{m}{2}$

TH1: $\frac{m}{2}>2\Leftrightarrow m>4$:

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$\frac{m}{2}$		$+\infty$
$-2x+m$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	

$\frac{-2x+m}{x-2}$	$-$	||	$+$	0	$-$

Suy ra $\frac{-2x+m}{x-2}>0 \Leftrightarrow x \in \left(2;\frac{m}{2}\right)$ và $\frac{-2x+m}{x-2}<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;2)\cup\left(\frac{m}{2};+\infty\right)$

TH2: $\frac{m}{2}=2 \Leftrightarrow m=4$: Ta có $\frac{-2x+m}{x-2}=\frac{-2x+2}{x-2}=-2$

Suy ra $\frac{-2x+m}{x-2}<0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

TH3: $\frac{m}{2}<2 \Leftrightarrow m<4$:

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{m}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+m$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{-2x+m}{x-2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Suy ra $\frac{-2x+m}{x-2}>0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{m}{2};2\right)$ và $\frac{-2x+m}{x-2}<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{m}{2}\right)\cup(2;+\infty)$

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.80: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $-4x+8$

A.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$+$	0	$+$	

B.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$-$	0	$-$	

C.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$+$	0	$-$	

D.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		$-$	0	$+$	

b) $3x+9$

A.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		+	0	+	

C.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	+	

D.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		+	0	$-$	

c) x^2+4x+3

A.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x+2		+	0	+	|	+	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	+	
x^2-4		+	0	$-$	0	+	

B.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x+2		$-$	0	+	|	+	
$x-2$		$-$	|	+	0	+	
x^2-4		+	0	$-$	0	+	

C.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x+2		$-$	0	+	|	+	
$x-2$		+	|	$-$	0	+	
x^2-4		+	0	$-$	0	+	

D.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	+	|	+	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	+	

x^2-4	+	0	$-$	0	+

d) $-3x^2+10x-3$

A.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		+	|	$-$	0	+	
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	+	0	$-$	

B.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	+	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	+	
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	+	0	$-$	

C.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	+	
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	+	0	+	

D.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	+	
$-3x^2+10x-3$		$-$	0	+	0	$-$	

Bài làm:

Bài 4.80: a) Ta có $-4x+8=0 \Leftrightarrow x=2$, $a=-4<0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		+	0	$-$	

b) Ta có $3x+9=0 \Leftrightarrow x=-3$, $a=4>0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	+	

c) Ta có $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$, $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+2$		–	0	+	|	+	
$x-2$		–	|	–	0	+	
x^2-4		+	0	–	0	+	

d) Ta có $-3x^2+10x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Suy ra $-3x^2+10x-3=(x-3)(1-3x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	–	|	–	
$x-3$		–	|	–	0	+	
$-3x^2+10x-3$		–	0	+	0	–	

Bài 4.81: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $\frac{-2x+4}{x-3}$

A.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	+	|	–	
$x-3$		+	|	–	0	+	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		+	0	+	||	–	

B.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	–	|	–	
$x-3$		–	|	–	0	+	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		–	0	+	||	+	

C.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	+	|	–	
$x-3$		–	|	+	0	+	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		–	0	+	||	–	

D.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	–	|	–	
$x-3$		–	|	–	0	+	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		–	0	+	||	–	

b) $\frac{4x-8}{x^2-3x}$

A.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		–	|	–	0	+	|	+	
x		–	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		–	|	–	|	–	0	+	
$\frac{4x-8}{x^2-3x}$		–	||	+	0	–	||	+	

B.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		+	|	–	0	+	|	+	
x		–	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		–	|	+	|	+	0	+	
$\frac{4x-8}{x^2-3x}$		–	||	+	0	–	||	+	

C.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		–	|	–	0	+	|	+	
x		–	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		–	|	+	|	+	0	+	
$\frac{4x-8}{x^2-3x}$		–	||	+	0	–	||	+	

D.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		–	|	–	0	+	|	+	
x		–	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		+	|	–	|	–	0	+	
$\frac{4x-8}{x^2-3x}$		–	||	+	0	–	||	+	

c) $x\ \ 9-x^2\ \ (x+3)$

A.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		+	|	–	0	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	0	–	
$x+3$		–	0	+	|	+	|	+	
$x(9-x^2)(x+3)$		–	0	–	0	+	0	–	

B.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		–	|	+	0	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	0	–	
$x+3$		–	0	+	|	+	|	+	
$x(9-x^2)(x+3)$		–	0	–	0	+	0	–	

C.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		–	|	–	0	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	0	–	
$x+3$		–	0	+	|	+	|	+	
$x(9-x^2)(x+3)$		–	0	+	0	+	0	+	

D.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		–	|	–	0	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	0	–	
$x+3$		–	0	+	|	+	|	+	
$x\ \ 9-x^2\ \ (x+3)$		–	0	–	0	+	0	–	

d) $\frac{x^2}{(x+1)^2}-1$

A.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		–	|	+	0	+	

$x+1$		−	0	+	|	+	
$\frac{x^2}{(x+1)^2}-1$		−	||	−	0	+	

B.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		+	|	−	0	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	
$\frac{x^2}{x+1^{2}}-1$		−	||	−	0	+	

C.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		−	|	−	0	+	
$x+1$		+	0	+	|	+	
$\frac{x^2}{(x+1)^2}-1$		+	||	−	0	+	

D.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		−	|	−	0	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	
$\frac{x^2}{(x+1)^2}-1$		−	||	−	0	+	

Bài làm:

Bài 4.81: a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	−	|	−	
$x-3$		−	|	−	0	+	
$\frac{-2x+4}{x-3}$		−	0	+	||	−	

b) Ta có $\frac{4x-8}{x^2-3x}=\frac{4x-8}{x(x-3)}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		−	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	

$x-3$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{4x-8}{x^2-3x}$	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$

c) Ta có $x\left(9-x^2\right)(x+3)=x\left(3-x\right)\left(x+3\right)^2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x\left(9-x^2\right)(x+3)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Ta có $\frac{x^2}{\left(x+1\right)^2}-1=\frac{\left(x+1\right)^2-x^2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{2x+1}{\left(x+1\right)^2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x^2}{x+1\ ^2}-1$		$-$	||	$-$	0	$+$	

➢ DẠNG 2: ỨNG DỤNG XÉT DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT HAI ẨN VÀO GIẢI TOÁN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a) $x-1\quad 2-3x\quad \ge 0$

A. $S=\left[\frac{2}{3};1\right]$ **B.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right)$ **C.** $S=\left[\frac{2}{3};1\right)$ **D.** $S=\left(\frac{2}{3};1\right]$

b) $\left(x-2\right)\left(x^2-5x+4\right)<0$

A. $S=\left(-\infty;1\right)$ **B.** $S=\left(2;4\right)$ **C.** $S=\varnothing$ **D.** $S=\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;4\right)$

c) $\left(2x-1\right)\left(x^3-1\right)\le 0$

A. $S=\left(\frac{1}{2};1\right)$ **B.** $S=\left[\frac{1}{2};1\right]$ **C.** $S=\left[\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$

d) $x\quad \sqrt{3}x-3\quad 3-x^2\quad \le 0$

A. $S=(-\infty;-\sqrt{3}]$ **B.** $S=[0;+\infty)$

C. $S=\varnothing$ **D.** $S=(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;+\infty)$

Lời giải

a) Ta có $x-1 \quad 2-3x \quad =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1 \quad 2-3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left[\frac{2}{3};1\right]$.

b) Ta có $x-2 \quad x^2-5x+4 \quad = \quad x-2 \quad x-1 \quad x-4$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-2 \quad x^2-5x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;1)\cup(2;4)$.

c) Ta có $(2x-1)(x^3-1)\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(x^2+x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x-1 \quad x-1 \quad \le 0$ (vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1 \quad 2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left[\frac{1}{2};1\right]$.

d) Ta có $x \quad \sqrt{3}x-3 \quad 3-x^2 \quad \le 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3} \quad x-\sqrt{3} \quad \sqrt{3}-x \quad \sqrt{3}+x \quad \le 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3}x\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x\left(x+\sqrt{3}\right)\ge 0 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-1)(2-3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $x\quad x+\sqrt{3}\quad \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-\sqrt{3}] \cup [0;+\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;+\infty)$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{-2x+4}{(2x-1)(3x+1)}\leq 0$

A. $S=(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2})$ **B.** $S=[2;+\infty)$

C. $S=(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2})\cup[2;+\infty)$ **D.** $S=\varnothing$

b) $\dfrac{x-3\quad x+2}{x^2-1}<1$

A. $S=(1;+\infty)$ **B.** $S=(-5;-1)$

C. $S=(-5;-1)\cup(1;+\infty)$ **D.** $S=\varnothing$

c) $\dfrac{1}{x-2\ \ ^2}\leq\dfrac{1}{x+4}$

A. $S=[4;+\infty)$ **B.** $S=(-4;0]$

C. $S=(-4;0]\cup[4;+\infty)$ **D.** $S=\varnothing$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x+4$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{-2x+4}{(2x-1)(3x+1)}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2})\cup[2;+\infty)$

b) Ta có $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1\Leftrightarrow 1-\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}>0\Leftrightarrow\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

$\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}$	$-$	0	+	||	$-$	||	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-5;-1)\cup(1;+\infty)$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -4 \end{cases}$

Ta có $\dfrac{1}{(x-2)^2}\leq\dfrac{1}{x+4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{(x-2)^2}\geq 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x}{(x+4)(x-2)^2}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x(x-4)}{(x+4)(x-2)^2}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x(x-4)}{(x+4)}\geq 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	+	|	+	|	+	
x		$-$	|	$-$	0	+	|	+	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	+	
$\dfrac{x(x-4)}{(x+4)}$		$-$	||	+	0	$-$	0	+	

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;0]\cup[4;+\infty)$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x+1|<3x$

A. $S=(1;+\infty)$ **B.** $S=\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$ **C.** $S=\left(-\infty;\dfrac{-1}{2}\right)$ **D.** $S=\varnothing$

b) $\left||2x-1|-4\right|>3$

A. $S=\ -\infty;-3$ **B.** $S=(0;1)$

C. $S=(4;+\infty)$ **D.** $S=(-\infty;-3)\cup(0;1)\cup(4;+\infty)$

c) $|x+1|-|x-2|\geq 3$

A. $S=[1;+\infty)$ **B.** $S=[3;+\infty)$ **C.** $S=[2;+\infty)$ **D.** $S=[4;+\infty)$

Lời giải

a) Với $x\geq-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $2x+1<3x\Leftrightarrow x>1$

Kết hợp với điều kiện $x\geq-\dfrac{1}{2}$ suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $(1;+\infty)$

Với $x<-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $-2x-1<3x\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{5}$

Kết hợp với điều kiện $x<-\dfrac{1}{2}$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

b) Ta có $\left|\left|2x-1\right|-4\right|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|-4>3\\ \left|2x-1\right|-4<-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|2x-1\right|>7\\ \left|2x-1\right|<1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1>7\\ 2x-1<-7\\ -1<2x-1<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\ x<-3\\ 0<x<1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \; -\infty;-3 \; \cup \; 0;1 \; \cup \; 4;+\infty$.

c) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		–	0	+	|	+	
$x-2$		–	|	–	0	+	

Từ bảng xét dấu đó ta chia ra các trường hợp sau

Với $x<-1$ ta có bất phương trình tương đương với

$-(x+1)+(x-2)\ge 3 \Leftrightarrow -3\ge 3$ (vô nghiệm)

Với $-1\le x<2$ ta có bất phương trình tương đương với

$(x+1)+(x-2)\ge 3 \Leftrightarrow x\ge 2$

Kết hợp với điều kiện $-1\le x<2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $x\ge 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$(x+1)-(x-2)\ge 3 \Leftrightarrow 3\ge 3$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 2$ suy ra bất phương trình có nghiệm là $x\ge 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;+\infty)$.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{\left|x-2\right|-x}{x}<1$

A. $S=(\frac{2}{3};+\infty)$ **B.** $S=(-\infty;0)$

C. $S=(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$ **D.** $S=\varnothing$

b) $\dfrac{\left|x-1\right|-1}{x^4-x^2}\ge 0$

A. $S=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\setminus\{-1\}$ **B.** $S=(-\infty;-1)$

C. $S=(0;+\infty)\setminus\{1\}$ **D.** $S=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\setminus\{1\}$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{x-1}\le 0$

A. $S=[3;+\infty)$ **B.** $S=(1;2]$

C. $S=(1;2]\cup[3;+\infty)$ **D.** $S=\varnothing$

Lời giải

a) Với $x\ge 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$\frac{x-2-x}{x}<1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x}<1 \Leftrightarrow x>-2$

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S_1=[2;+\infty)$

Với $x<2$ ta có bất phương trình tương đương với

$\frac{2-x-x}{x}<1 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{x}<1 \Leftrightarrow 1-\frac{2-2x}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x}>0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{3x-2}{x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Kết hợp điều kiện $x<2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S_2=(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};2)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

b) ĐKXĐ: $x^4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$

Ta có $\frac{|x-1|-1}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x-1|+1)(|x-1|-1)}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x-1|^2-1}{x^4-x^2}\geq 0$

$\frac{x^2-x}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)}\geq 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x(x+1)}$		$+$	||	$-$	||	$+$	

Kết hợp điều kiện xác đinh suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ x\geq -1 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}$

Vì $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}>0$, $\sqrt{x+1}-2>0$ nên bất phương trình tương đương với

$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{x-1}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(-x+2)(x-3)}{x-1}\leq 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	

$x-3$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$		
$\frac{(-x+2)(x-3)}{x-1}$	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$		

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;2]\cup[3;+\infty)$.

Nhận xét:

* Đối với bất phương trình phức tạp chúng ta nên đặt điều kiện xác định sau đó rồi rút gọn cho biểu thức chung hoặc rút gọn biểu thức luôn xác định một dấu.

* Nhiều khi chúng ta cần phải nhân hay chia với một biểu thức luôn xác định một dấu nhằm khử đi căn thức hay dấu giá trị tuyệt đối thì bài toán trở nên đơn giản hơn.

Ví dụ 5: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}\dfrac{(x-\sqrt{2})(2-2x)}{(2x-1)(x+2)}\ge 0 & (1)\\ mx>2 & (2)\end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m=-1$

A. $S=\varnothing$ **B.** $S=(-\infty;-2)$ **C.** $S=\left(-2;\frac{1}{2}\right)\cup\{\sqrt{2}\}$ **D.** $S=\mathbb{R}$

b) Tìm m để hệ bất phương trình có nghiệm

A. $-1<m<1$ và $m>\sqrt{2}$.

B. $-1<m<0$ và $m>\sqrt{3}$.

C. $-21<m<0$ và $m>\sqrt{12}$.

D. $-1<m<0$ và $m>\sqrt{2}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases}x\ne -2\\ x\ne \dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ta có $(1)\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})(\sqrt{2}-x)}{(2x-1)(x+2)}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{(2x-1)(x+2)}\le 0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{(2x-1)(x+2)}$		$+$	||	$-$	||	$+$	

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S_1=\left(-2;\frac{1}{2}\right)\cup\{\sqrt{2}\}$

a) Khi $m=-1$ ta có bất phương trình (2) trở thành $-x>2\Leftrightarrow x<-2$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2=(-\infty;-2)$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S=S_1\cap S_2=\varnothing$.

b) Với $m=0$ bất phương trình (2) trở thành $0.x>2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm do đó hệ bất phương trình vô nghiệm

- Với $m>0$ bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x>\frac{2}{m}$

Đối chiếu với điều kiện ta có

Nếu $\frac{2}{m}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow m\le 4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2=\left(\frac{2}{m};+\infty\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}0<m\le 4\\ \frac{2}{m}<\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m\le 4\\ m>\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{2}<m\le 4$

Nếu $\frac{2}{m}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2=\left(\frac{2}{m};+\infty\right)\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ \frac{2}{m}<\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\ m>\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow m>4$

- Với $m<0$ bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x<\frac{2}{m}$

Đối chiếu với điều kiện ta có

Nếu $\frac{2}{m}>-2\Leftrightarrow m>-1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2=\left(-\infty;\frac{2}{m}\right)\backslash\{-2\}$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<0\\ \frac{2}{m}>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<0\\ m>-1\end{cases}\Rightarrow -1<m<0$

Nếu $\frac{2}{m}\le -2\Leftrightarrow m\le -1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2=\left(-\infty;\frac{2}{m}\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -1\\ \frac{2}{m}>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le -1\\ m>-1\end{cases}$(loại)

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<0$ và $m>\sqrt{2}$.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.82: Giải các bất phương trình sau:

$a)\ 3x^2-10x+3\ge 0$

A. $T=(-\infty;\frac{1}{3}]$

B. $T=[3;+\infty)$

C. $T=\varnothing$

D. $T=(-\infty;\frac{1}{3}]\cup[3;+\infty)$

b) $(\sqrt{2}-x)(x^2-2)(2x-4)<0$

A. $T=(2;+\infty)$ **B.** $T=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$

C. $T=\varnothing$ **D.** $T=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$

c) $\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$

A. $\left[\begin{array}{l}-9<x<-6\\-3<x<0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}-3<x<-6\\-3<x<0\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}-9<x<6\\-3<x<0\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}-9<x<-6\\3<x<6\end{array}\right.$

d) $\frac{2}{1-2x}\le\frac{3}{x+1}$

A. $\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2}\\-1<x\le\frac{1}{8}\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{3}\\-1<x\le\frac{1}{8}\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{3}\\-1<x\le\frac{1}{4}\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{1}{2}\\-1<x\le\frac{1}{8}\end{array}\right.$

e) $\frac{|2x-1|-x}{2x}>1$

A. $0<x<\frac{1}{5}$ **B.** $0<x$ **C.** $x<\frac{1}{5}$ **D.** Vô nghiệm

f) $\frac{2-|x-2|}{x^2-1}\ge 0$

A. $\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\1<x<4\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 0\\1<x\le 4\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}-1<x\le 0\\1<x\le 4\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}-1<x\le 2\\1<x\le 4\end{array}\right.$

g) $\frac{\sqrt{x+4}-2}{4-9x^2}\le 0$

A. $x>\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}<x\le 0$ **C.** $x>\frac{2}{3},-\frac{2}{3}<x\le 0$ **D.** $S=\varnothing$

h) $\frac{x^2-2x-3}{\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{4-5x}}\ge 0$

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}<x\le 3\\x\le -1\end{array}\right.$ **B.** $\frac{3}{2}<x\le 3$ **C.** $x\le -1$ **D.** Vô nghiệm

Bài làm:

Bài 4.82: a) BXD :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
VT		+	0	−	0	+	

Tập nghiệm : $T=(-\infty;\frac{1}{3}]\cup[3;+\infty)$

b) $T=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

c) bpt $\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+6)}{x(x+9)}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -9<x<-6 \\ -3<x<0 \end{array}\right.$

d) $bpt \Leftrightarrow \frac{8x-1}{(2x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{2} \\ -1<x\le\frac{1}{8} \end{array}\right.$

e) $bpt \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{5}$ f) $\left[\begin{array}{l} -1<x\le 0 \\ 1<x\le 4 \end{array}\right.$ g) $x>\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}<x\le 0$

h) $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{4-5x}>0 \Leftrightarrow 3-2x>0$ suy ra $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{4-5x}$ cùng dấu với $3-2x$

$$\frac{x^2-2x-3}{\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{4-5x}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{3-2x}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2}<x\le 3 \\ x\le -1 \end{array}\right.$$

Bài 4.83: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x-2|<\frac{x}{2}$

A. $\frac{4}{3}<x$ **B.** $x<4$ **C.** $\frac{4}{3}<x<4$ **D.** Vô nghiệm

b) $4x-|2x+1|\le 3$

A. $x\le 2$ **B.** $x<2$ **C.** $x\le 1$ **D.** $x\le 3$

c) $||3x-2|-1|>4$

A. $x<-1$ **B.** $x>\frac{7}{3}$ **C.** $x<-1, x>\frac{7}{3}$ **D.** Vô nghiệm

c) $|2x+3|-|3x+4|\ge -5$

A. $-6\le x$ **B.** $x\le 4$ **C.** $-6\le x\le 4$ **D.** Vô nghiệm

Bài làm:

Bài 4.83: a) $\frac{4}{3}<x<4$ b) $x\le 2$ c) $x<-1, x>\frac{7}{3}$ d) $-6\le x\le 4$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN TỔNG HỢP LẦN 1.

Bài 2: Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Câu 1. Số $x=3$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $5-x<1$. **B.** $3x+1<4$. **C.** $4x-11>x$. **D.** $2x-1>3$.

Câu 2. Số $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $3-x<0$. **B.** $2x+1<0$. **C.** $2x-1>0$. **D.** $x-1>0$.

Câu 3. Số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}}>\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 4. Số $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $m-x^2<2$ khi và chỉ khi

A. $m>3$. **B.** $m<3$. **C.** $m=3$. **D.** $m<1$.

Câu 5. Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $2m-3mx^2\ge 1$ khi và chỉ khi

A. $m\le -1$. **B.** $m\le 1$. **C.** $-1\le m\le 1$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 6. Xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $x+2\sqrt{x-1}>2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x>0$. Sai **B.** $x+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x>0$. Đúng

C. $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2\le 2\Leftrightarrow 2x-3\le 2$. Sai **D.** $x+\sqrt{x-1}>\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x>0$. Sai

Câu 7. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $2x>1$?

A. $2x+\sqrt{x-2}>1+\sqrt{x-2}$. **B.** $2x-\frac{1}{x-3}>1-\frac{1}{x-3}$.

C. $4x^2>1$. **D.** $2x+\sqrt{x+2}>1+\sqrt{x+2}$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $3-2x<x$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $2x+1>3(2-x)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;5)$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ là:

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. **B.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$. C. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. D. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $5x-2(4-x)>0$ là:

A. $\left(\frac{8}{7};+\infty\right)$. B. $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. C. $\left(-\infty;\frac{8}{7}\right)$. D. $\left(-\frac{8}{7};+\infty\right)$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $3x<5(1-x)$ là:

A. $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. B. $\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$. C. $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{8}\right)$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ là:

A. $(-\infty;2)$. B. $(2;+\infty)$. C. $(-\infty;2]$. D. $[2;+\infty)$.

Câu 14. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x-3|}{\sqrt{x-2}}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. C. $\{3\}$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{5-x}}>\frac{x-2}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(-\infty;2)$. B. $(2;\infty)$. C. $(2;5)$. D. $(-\infty;2]$.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $3-2x+\sqrt{2-x}<x+\sqrt{2-x}$ là

A. $(1;2)$. **B.** $(1;2]$. C. $(-\infty;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 17. Phương trình $\frac{|6-x|}{\sqrt{1-4x}}=\frac{2x+3}{\sqrt{1-4x}}$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0. B. 1. C. 2. D. nhiều hơn 2.

Câu 18. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $(m^2+2m)x\le m^2$ thoả mãn với mọi x là

A. $(-2;0)$. **B.** $\{-2;0\}$. C. $\{0\}$. D. $[-2;0]$.

Câu 19. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $(m^2-m)x<m$ vô nghiệm là

A. $(0;1)$. **B.** $\{0\}$. C. $\{0;1\}$. D. $\{1\}$.

Câu 20. Phương trình $x^2-7mx-m-6=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-6$. **B.** $m>-6$. C. $m<6$. D. $m>6$.

Câu 21. Phương trình $x^2-2mx+m^2+3m-1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<\frac{1}{3}$. **B.** $m\le\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge\frac{1}{3}$. **D.** $m\ge-\frac{1}{3}$.

Câu 22. Phương trình $(m^2+1)x^2-x-2m+3=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m>\frac{2}{3}$. **B.** $m<\frac{3}{2}$. **C.** $m>\frac{3}{2}$. **D.** $m>-\frac{3}{2}$.

Câu 23. Phương trình $x^2+4mx+4m^2-2m-5=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\ge\frac{-5}{2}$. **B.** $m>\frac{-5}{2}$. **C.** $m\ge\frac{5}{2}$. **D.** $m\le\frac{-5}{2}$.

Câu 24. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+2>2x+3\\1-x>0\end{cases}$ là:

A. $\left(\frac{1}{5};1\right)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\varnothing$ (tập rỗng).

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x-1}{|x+3|}<0$ là

A. $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\backslash\{-3\}$.

Câu 26. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+1>3x-2\\-x-3<0\end{cases}$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 27. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-5\ge0\\8-3x\ge0\end{cases}$ là

A. $\left[\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{3}{8};\frac{2}{5}\right]$. **C.** $\left[\frac{8}{3};\frac{5}{2}\right]$. **D.** $\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}+\sqrt{2x-1}$ là:

A. $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4-3x}$ là

A. $\left[\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]$. **C.** $\left[\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\varnothing$.

Câu 30. Hai đẳng thức: $|2x-3|=2x-3;|3x-8|=8-3x$ cùng xảy ra khi và chỉ khi:

A. $\frac{8}{3} \le x \le \frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2} \le x \le \frac{8}{3}$. C. $x \le \frac{8}{3}$. D. $x \ge \frac{3}{2}$.

Câu 31. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3-2x} + \sqrt{5-6x}$ là

A. $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right]$. B. $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-6}$ là

A. $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$. B. $\left[\frac{6}{5}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $\left[\frac{3}{4}; \frac{6}{5}\right]$.

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}} > \frac{x-1}{\sqrt{3-x}}$ là

A. $\varnothing$. B. $(1;3)$. C. $(-\infty;1)$. D. $(-\infty;3)$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x+4}$ là

A. $[1;+\infty)$. B. $[1;+\infty) \setminus \{4\}$. C. $(1;+\infty) \setminus \{4\}$. D. $(-4;+\infty)$.

Câu 35. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $|x-1| < x+1$ là:

A. $(0;1)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(0;+\infty)$. D. $[0;+\infty)$.

Câu 36. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $|x-1| \le x-1$ là:

A. $(0;1)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(0;+\infty)$. D. $[1;+\infty)$.

Câu 37. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm (x;y) với x > y?

A. $a > \frac{1}{2}$. B. $a > \frac{1}{3}$. C. $a > -\frac{1}{2}$. D. $a < \frac{1}{2}$.

Câu 38. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-m<3 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < -\frac{5}{2}$. B. $m \le -\frac{5}{2}$. C. $m < \frac{7}{2}$. D. $m \ge -\frac{5}{2}$.

Câu 39. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m \le 0 \ (1) \\ -x+5<0 \ (2) \end{cases}$. Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < -5$. B. $m > -5$. C. $m > 5$. D. $m < 5$.

Câu 40. Phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m<3$. **B.** $m<1$. **C.** $m=1$. **D.** $1<m<3$.

Câu 41. Phương trình $x^2+x+m=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>-\frac{3}{4}$. **B.** $m<-\frac{3}{4}$. **C.** $m>\frac{1}{4}$. **D.** $m>-\frac{5}{4}$.

Câu 42. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-1}{x-3}>1$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;5)$.

Câu 43. Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1>0\\x-m<2\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<-\frac{3}{2}$. **B.** $m\le-\frac{3}{2}$. **C.** $m>-\frac{3}{2}$. **D.** $m\ge-\frac{3}{2}$.

Câu 44. Tập hợp các giá trị m để hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1\ge3\\x-m\le0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất là

A. $\varnothing$. **B.** $\{2\}$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 45. Hệ phương trình $\begin{cases}x+y=2\\x-y=5a-2\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x<0$ khi và chỉ khi

A. $a<\frac{2}{5}$. **B.** $a>\frac{2}{5}$. **C.** $a<\frac{6}{5}$. **D.** $a<\frac{5}{2}$.

Câu 46. Phương trình $3(|x|-m)=|x|+m-1$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge\frac{1}{4}$. **C.** $m<\frac{1}{4}$. **D.** $m\ge4$.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $\frac{|3-x|}{\sqrt{1-2x}}=\frac{2x+3}{\sqrt{1-2x}}$ là bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Câu 48. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{x-2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}}>\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $[1;3)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Bài 3: Dấu của nhị thức bậc nhất

Câu 50. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi x nhỏ hơn 2 ?

A. $f(x)=3x+6$. **B.** $f(x)=6-3x$. **C.** $f(x)=4-3x$. **D.** $f(x)=3x-6$.

Câu 51. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi số x nhỏ hơn $-\frac{2}{3}$?

A. $f(x)=-6x-4$. **B.** $f(x)=3x+2$. **C.** $f(x)=-3x-2$. **D.** $f(x)=2x+3$.

Câu 52. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi số x nhỏ hơn $-\frac{3}{2}$?

A. $f(x)=2x+3$. **B.** $f(x)=-2x-3$. **C.** $f(x)=-3x-2$. **D.** $f(x)=-2x+3$.

Câu 53. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi x lớn hơn 2 ?

A. $f(x)=2x-1$. **B.** $f(x)=x-2$. **C.** $f(x)=2x+5$. **D.** $f(x)=6-3x$.

Câu 54. Nhị thức $-5x+1$ nhận giá trị âm khi

A. $x<\frac{1}{5}$. **B.** $x<-\frac{1}{5}$. **C.** $x>-\frac{1}{5}$. **D.** $x>\frac{1}{5}$.

Câu 55. Nhị thức $-3x+2$ nhận giá trị dương khi

A. $x<\frac{3}{2}$. **B.** $x<\frac{2}{3}$. **C.** $x>-\frac{3}{2}$. **D.** $x>\frac{2}{3}$.

Câu 56. Nhị thức $-2x-3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-\frac{3}{2}$. **B.** $x<-\frac{2}{3}$. **C.** $x>-\frac{3}{2}$. **D.** $x>-\frac{2}{3}$.

Câu 57. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị dương với mọi x nhỏ hơn 2 ?

A. $f(x)=3x+6$. **B.** $f(x)=6-3x$. **C.** $f(x)=4-3x$. **D.** $f(x)=3x-6$.

Câu 58. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 59. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-2m}-\sqrt{4-2x}$ là $[1;2]$ khi và chỉ khi

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m>\frac{1}{2}$.

Câu 60. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-m}-\sqrt{6-2x}$ là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

A. $m=3$ **B.** $m<3$ **C.** $m>3$ **D.** $m<\frac{1}{3}$

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{m-2x}-\sqrt{x+1}$ là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

A. $m<-2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-2$.

Vẫn còn tổng hợp…..

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

TOÁN 10

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC 2

BIÊN SOẠN VÀ SƯU TẦM

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

➢ DẠNG TOÁN 1: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

1. Phương pháp giải

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ) ta cần khử dấu GTTĐ. Sau đây là một số cách thường dùng để khử dấu GTTĐ

+ Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

+ Đặt ẩn phụ là biểu thức chứa dấu GTTĐ để khử dấu GTTĐ

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: **Sử dụng định nghĩa và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.**

****Lưu ý:*** Sau đây là một số loại toán phương trình, bất phương trình cơ bản có thể thức hiện bằng phép biến đổi tương đương.

- $\left|f(x)\right| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$
- $\left|f(x)\right| = \left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$
- $\left|f(x)\right| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$
- $\left|f(x)\right| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\left|2x^2 - 3x - 1\right| = -x^2 + 2x + 1$ b) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = x^3 - 3x + 4$

c) $\left|x^2 - 5x + 4\right| - \left|x + 1\right| = x^2 + x$ d) $\left|x^2 - 3x + 1\right| + \left|x - 1\right| = 12\ \ x - 3$

Lời giải

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 1 = -x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = -(-x^2 + 2x + 1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2\text{x} - 1 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x \in \left\{0;1;2;-\dfrac{1}{3}\right\}$

b) Với $1 \le x \le 4 \Rightarrow x^2-5x+4 \ge 0$ ta có

Phương trình $\Leftrightarrow -\ \ x^2-5x+4\ \ = x^3-3x+4 \Leftrightarrow x^3+x^2-8x+8=0$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x^3+4+2 \ge 3\sqrt[3]{8x^3}=6x,\ x^2+2 \ge 2\sqrt{2}x$

Suy ra $x^3+x^2-8x+8 \ge 6x+2\sqrt{2}x-8x = \ \ 2\sqrt{2}-2\ \ x > 0$

Do đó phương trình vô nghiệm.

Với $\left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right. \Rightarrow x^2-5x+4>0$ ta có

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-5x+4=x^3-3x+4$

$\Leftrightarrow x^3-x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$(thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$

c) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	+	0	+	|	+	
x^2-5x+4		+	0	+	0	$-$	0	+	

Từ đó ta có các trường hợp sau

- Với $x \le -1$, ta có phương trình $\Leftrightarrow\ \ x^2-5x+4\ \ +\ \ x+1\ \ = x^2+x \Leftrightarrow x=1$ (loại)

- Với $-1 < x \le 1$, ta có phương trình $\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 4 \ - \ x + 1 \ = x^2 + x$

$\Leftrightarrow$ x = $\frac{3}{7}$ (thỏa mãn)

- Với $1 < x \le 4$, ta có phương trình $- \ x^2 - 5x + 4 \ - \ x + 1 \ = x^2 + x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0$ phương trình này vô nghiệm.

- Với $x > 4$, ta có phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - \ x + 1 \ = x^2 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = \frac{3}{7}$.

d) Ta có phương trình $\begin{cases} x \ge 3 \\ \left|x^2 - 3x + 1\right| + \left|x - 1\right| = 12 \ x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 3x + 1 + x - 1 = 12 \ x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 14x + 36 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x = 7 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 \pm \sqrt{13}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7 \pm \sqrt{13}$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau

a) $\left|x^2 - x - 1\right| \ge x - 1$

b) $\left|-x^2 + 3x + 2\right| < x^2 - 3x + 2$

c) $\left|3x^2 - 2\right| + \left|3 - 2x^2\right| \le 6 \ x^2 - 2$

d) $\left|\left|2x^2 - 5x + 3\right| - \left|x - 1\right|\right| > x - 2$.

Lời giải

a) Với $x < 1$ ta có $VT \ge 0, VP < 0$ suy bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x < 1$

Với $x \ge 1$ ta có bất phương trình tương đương với

$\begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 \ge x - 1 \\ x^2 - x - 1 \le 1 - x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x \ge 0 \\ x^2 - 2 \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ 1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; \sqrt{2}] \cup [2; +\infty)$

b) Với $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ ta có $VT \geq 0, VP < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với ta có $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$

Bất phương trình tương đương với $-\ x^2 - 3x + 2\ < -x^2 + 3x + 2 < x^2 - 3x + 2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$ suy ra nghiệm bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

c) Nếu $x^2 - 2 < 0$ thì $VT \geq 0, VP < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ \left|3x^2 - 2\right| + \left|2x^2 - 3\right| \leq 6\ \ x^2 - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2 \\ 3x^2 - 2 + 2x^2 - 3 \leq 6\ \ x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2 \\ x^2 \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sqrt{7} \\ x \leq -\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$

d) $\left|\left|2x^2 - 5x + 3\right| - \left|x - 1\right|\right| > x - 2$

Với $x < 2$ ta có $VT \geq 0, VP < 0$ suy bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x < 2$

Với $x \geq 2$ ta có $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3) > 0$ suy ra bất phương trình tương đương với

$\left|2x^2 - 5x + 3 - (x-1)\right| > x - 2 \Leftrightarrow \left|2x^2 - 6x + 4\right| > x - 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 > x - 2$ (vì $x \geq 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = (x-1)(2x-4) \geq 0$)

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq 2$ ta có nghiệm bất phương trình là $x > 2$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt

$\left|-x^2 - x + 6\right| = 4x + m$.

Lời giải

Ta có $\left|-x^2 - x + 6\right| = 4x + m \Leftrightarrow \left|-x^2 - x + 6\right| - 4x = m$

Xét hàm số $f(x) = \left|-x^2 - x + 6\right| - 4x$

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 5x + 6 & khi\ x \in [-3;2] \\ x^2 - 3x - 6 & khi\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	12	↗	$\frac{99}{4}$	↘		↘	-4	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

Phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số f cắt đường thẳng $y = m$ tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 12 < m < \dfrac{99}{4}$.

Vậy $12 < m < \dfrac{99}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(m)$. Từ đó suy ra

• Phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$

• Số nghiệm phương trình $f(x) = g(m)$ $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đường thẳng $y = g(m)$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Do đó khi gặp bài toán liên quan đến phương trình $f(x,m) = 0$ mà ta có thể cô lập được m thì ta sử dụng đồ thị(hoặc bảng biến thiên) để giải.

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$\left| x^2 - 3x + 2 \right| \ge 3x^2 + 5x + 3m^2 + 5m$.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left| x^2 - 3x + 2 \right| - 3x^2 - 5x \ge 3m^2 + 5m$

Xét hàm số $f(x) = \left| x^2 - 3x + 2 \right| - 3x^2 - 5x$

Ta có $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 8x + 2 & \text{khi } x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \\ -4x^2 - 2x - 2 & \text{khi } x \in (1;2) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\dfrac{1}{4}$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	10	↘	-8	-22	↘

	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $-\infty$

Từ đó ta có: $\max f(x) = f(-2) = 10$

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 10 \geq 3m^2 + 5m$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 5m - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{145}}{6} \leq m \leq \frac{-5+\sqrt{145}}{6}$$

Vậy $\frac{-5-\sqrt{145}}{6} \leq m \leq \frac{-5+\sqrt{145}}{6}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét **.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

• Bất phương trình $f(x) \geq k$ $(f(x) \leq k)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \max\limits_D f(x) \geq k$ $(\min\limits_D f(x) \leq k)$ với điều kiện tồn tại $\max\limits_D f(x)$ $(\min\limits_D f(x))$.

• Bất phương trình $f(x) \geq k$ $(f(x) \leq k)$ nghiệm đúng với $\forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_D f(x) \geq k$ $(\max\limits_D f(x) \leq k)$ với điều kiện tồn tại $\max\limits_D f(x)$ $(\min\limits_D f(x))$.

Loại 2: **Đặt ẩn phụ**

Ví dụ 5: Giải các phương trình và bất phương trình sau

a) $3(x^2 - 4x) - |x-2| > 12$ $\qquad$ b) $\frac{(x^2+1)^2}{x^2} \leq 3\left|x + \frac{1}{x}\right| - 2$

c) $x^4 - 2x^2 + 4x - (2x+5)|x^2 - 1| + 7 = 0$

Lời giải

a) Đặt $t = |x-2|, t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 4x + 4$

Bất phương trình trở thành $3(t^2 - 4) - t > 12$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - t - 24 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 3 \\ t < -\frac{8}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $t \geq 0$ ta có $t > 3$ suy ra

$$|x-2| > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > 3 \\ x-2 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \in \ -\infty;-1 \ \cup \ 5;+\infty$.

b) ĐKXĐ: $x \neq 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 4 \leq 3\left|x + \dfrac{1}{x}\right|$

Đặt $t = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$

Ta có $t = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| = \left|x\right| + \left|\dfrac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{\left|x\right|.\left|\dfrac{1}{x}\right|} = 2 \Rightarrow t \geq 2$

Bất phương trình trở thành $t^2 + 2 \leq 3t$

$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$

Kết hợp với $t \geq 2$ suy ra $t = 2$

Do đó $2 = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow 2\left|x\right| = \left|x^2 + 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = 2x \\ x^2 + 1 = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$(thỏa mãn)

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x = \pm 1$.

c) Phương trình $\Leftrightarrow \ x^2 - 1 \ ^2 - \ 2x + 5 \ \left|x^2 - 1\right| + 4x + 6 = 0$

Đặt $t = \left|x^2 - 1\right|, t \geq 0$

Phương trình trở thành $t^2 - \ 2x + 5 \ t + 4x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \ t - 2x - 3 \ \ t - 2 \ = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2x + 3 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 2x + 3$ ta có $2x + 3 = \left|x^2 - 1\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 = 2x + 3 \\ x^2 - 1 = -2x - 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 4 = 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$

Với $t = 2$ ta có $2 = \left|x^2 - 1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 2 \\ x^2 - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \ -\sqrt{3};1 - \sqrt{5};1 + \sqrt{5};\sqrt{3}$.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình $\left|x^2 - 2x + m\right| = x - 1$ có nghiệm.

Lời giải

Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \left(x^2-2x+m\right)^2=\left(x-1\right)^2 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-2x\right)^2+2m\left(x^2-2x\right)+m^2=x^2-2x+1 \\ x\ge 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-2x\right)^2+\left(2m-1\right)\left(x^2-2x\right)+m^2-1=0\ (*) \\ x\ge 1 \end{cases}$$

Đặt $t=x^2-2x$, vì $x\ge 1\Rightarrow t=\left(x-1\right)^2-1\ge -1$

Phương trình (*) trở thành $t^2-\left(2m-1\right)t+m^2-1=0$ (**)

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm $t\ge -1$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f\left(t\right)=t^2-\left(2m-1\right)t+m^2-1$ trên $[-1;+\infty)$ cắt trục hoành. Ta có

$$-\frac{b}{2a}=\frac{2m-1}{2}$$

+ TH1: Nếu $\frac{2m-1}{2}>-1\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$ ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		$\frac{2m-1}{2}$		$+\infty$
$f\left(x\right)$		$f\left(-1\right)$	↘	$f\left(\frac{2m-1}{2}\right)$	↗	$+\infty$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow f\left(\frac{2m-1}{2}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 - \ 2m-1 \ \left(\frac{2m-1}{2}\right)+m^2-1\le 0 \Leftrightarrow m<\frac{5}{4}$

Kết hợp với điều kiện $m>-\frac{1}{2}$ suy ra $-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ TH2: Nếu $\frac{2m-1}{2}=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ phương trình (**) trở thành

$t^2+2t-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{2}$ có $t=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}>-1$ suy ra $m=-\frac{1}{2}$ thảo mãn yêu cầu bài toán

+ TH3: Nếu $\frac{2m-1}{2}<-1 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$ ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f\ x$	(gạch chéo)	$f\ -1$ ↗	$+\infty$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow f\ -1\ \le 0$

$\Leftrightarrow 1+2m-1+m^2-1\le 0 \Leftrightarrow m^2+2m-1\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le m\le -1+\sqrt{2}$

Kết hợp với điều kiện $m<-\frac{1}{2}$ suy ra $-1-\sqrt{2}\le m<-\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy $-1-\sqrt{2}\le m<\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình $x\ \ x-2\ \ -m\left|x-1\right|+2>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\ x-1\ ^2-m\left|x-1\right|+1>0$

Với $x=1$ ta có bất phương trình luôn đúng với mọi m

Với $x \ne 1$. Đặt $t = \left| x-1 \right| \Rightarrow t > 0$

Bất phương trình trở thành $t^2 - mt + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} > m$ (*)

Suy ra bất phương trình ban đầu nghiệm đúng với mọi $x \ne 1$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $t > 0 \Leftrightarrow \min\limits_{t>0} \frac{t^2+1}{t} > m$

Ta có $\frac{t^2+1}{t} \ge \frac{2t}{t} = 2$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\min\limits_{t>0} \frac{t^2+1}{t} = 2$, do đó $m < 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy $m < 2$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.113: Giải các phương trình sau

a) $\left| 3x-2 \right| = x^2 + 2x + 3$ b) $| 2x^2 - 7x + 2 | = x + 2$

c) $\left| x^2 - 3x + 2 \right| - \left| x+2 \right| = x^2 - 3x$ d) $\left| \frac{2x}{x+1} \right| = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

lời giải

Bài 4.113: a) Ta thấy $x^2 + 2x + 3 > 0\ \forall x$ nên phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x+3=3x-2 \\ x^2+2x+3=-3x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+5=0 \\ x^2+5x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

b) Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-7x+2=x+2 \\ 2x^2-7x+2=-x-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-8x=0 \\ 2x^2-6x+4=0 \end{array}\right. \end{cases}$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x=0;\ x=1;\ x=2;\ x=4$.

c) $x=-4,\ x=0$

d) ĐKXĐ: $x \ne \pm 1$. Với ĐK đó:

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left| \frac{2x}{x+1} \right| = \frac{2x}{x^2-1} \Leftrightarrow \left| \frac{2x}{x+1} \right| = \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)=0 \\ \dfrac{2x}{x+1}\ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-1}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)=0 \\ \dfrac{2x}{x+1}< 0 \end{cases}$

Giải ra ta có nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=2$.

Bài 4.114: Giải các bất phương trình sau

a) $\left|x^2-5x+4\right|>x-2$ b) $\left|x^2-x-6\right|<x$

c) $\left|x-3\left|x-1\right|\right|>x+2$ d) $\left|2x-1\right|+\left|3x-2\right|\le x+3$

e) $x^3-\dfrac{1}{x^3}\le 3\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$

lời giải

Bài 4.114: a) * Nếu $x-2<0 \Leftrightarrow x<2 \Rightarrow$ bpt luôn đúng.

* Nếu $x\ge 2 \Rightarrow$ bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4>x-2 \\ x^2-5x+4<-x+2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+6>0 \\ x^2-4x+2<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3-\sqrt{3} \vee x>3+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với $x\ge 2$ ta có: $2\le x<2+\sqrt{2} \vee x>3+\sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình : $\left[\begin{array}{l} 2\le x<2+\sqrt{2} \\ x>3+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

b) Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -x<x^2-x-6<x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2-2x-6<0 \\ x^2-6>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}<x<1+\sqrt{7}$.

Vậy nghiệm bất phương trình : $\sqrt{6}<x<1+\sqrt{7}$.

c) $T=\left(-\infty;\dfrac{1}{5}\right)\cup(5;+\infty)$ d) $T=\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$

e) Đặt $t=\left|x-\frac{1}{x}\right|, t\geq 0 \Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\right]$

Đáp số: $x\leq -1,\ 0<x\leq 1$

Bài 4.115: Biện luận số nghiệm của phương trình : $|x-1|-|x^2-3x+2|=5m-3$.

lời giải

Bài 4.115: Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y=5m-3$ và đồ thị (C) : $y=|x-1|-|x^2-3x+2|$

Ta có: $y=\begin{cases}-x^2+4x-3 & \text{khi } x\geq 2\\ x^2-2x+1 & \text{khi } 1\leq x<2\\ -x^2+2x-1 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta có

- Nếu $5m-3>1 \Leftrightarrow m>\frac{4}{5} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m=\frac{4}{5} \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm.
- Nếu $m<\frac{4}{5} \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 4.116: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$|-2x^2+10x-8|=m-5x+x^2.$$

lời giải

Bài 4.116: PT $\Leftrightarrow |2x^2-10x+8|-x^2+5x=m$

Xét hàm số $f(x)=|2x^2-10x+8|-x^2+5x=\begin{cases}x^2-5x+8 \text{ khi } x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)\\ -3x^2+15x-8 \text{ khi } x\in(1;4)\end{cases}$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(x)=|2x^2-10x+8|-x^2+5x$ cắt đường thẳng $y=m \Leftrightarrow 4<m<\frac{43}{4}$.

Bài 4.117: Tìm m để bất phương trình $\left|2x^2-3x-2\right|\ge 5m-8x-2x^2$ nghiệm đúng với mọi x.

lời giải

Bài 4.117: Bất phương trình $\Leftrightarrow \left|2x^2-3x-2\right|+8x+2x^2\ge 5m$.

Xét hàm số $y=f(x)=\begin{cases}4x^2+5x-2 \text{ khi } x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)\\ 11x+2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)\end{cases}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}4x^2+5x-2 \text{ khi } x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)\\ 11x+2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)\end{cases}$

Ta có $\min y=-\frac{57}{16}$ suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 5m\le -\frac{57}{16}\Leftrightarrow m\le -\frac{57}{80}$

Bài 4.118: Cho bất phương trình $x^2-4x-3\,|\,x-2\,|+2m-2=0$

a) Giải phương trình khi $m=1$

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

lời giải

Bài 4.118: Đặt $t=|x-2|, t\ge 0$ ta có phương trình: $t^2-3t+2m-6=0$ (*)

a) $x=-2,\ x=6$

b) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=27-8m>0\\ 2m-6>0\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<\frac{27}{8}$.

Bài 4.119: Cho bất phương trình $x^2-2mx+2\left|x-m\right|-m^2+2>0$

a) Giải bất phương trình khi $m = 2$
b) Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$
lời giải

Bài 4.119: a) $x > 2,\ x < 0$ b) $|m| < 1$.

➢ DẠNG TOÁN 2: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

1. Phương pháp giải.
Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn mục đích chúng ta phải khử căn thức đi. Sau đây là một số phương pháp thường dùng.
+ Biến đổi tương đương(Bình phương hai vế, phân tích thành nhân tử)
Lưu ý: Đối với bất phương trình, bình phương hai vế không âm thì mới thu về bất phương trình tương đương cùng chiều
+ Đặt ẩn phụ
+ Đánh giá
2. Các ví dụ minh họa.
Loại 1: **Sử dụng phép biến đổi tương đương**
Lưu ý một số phương trình, bất phương trình cơ bản sử dụng phép biến đổi tương đương như sau
Phương trình:

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \left[g(x)\right]^2 \end{cases}$

Bất phương trình:

- $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left[g(x)\right]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > \left[g(x)\right]^2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau
a) $\sqrt{x^3 - x + 1} = \sqrt{-2x^2 - x + 2}$ b) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = 3 - x^2$

c) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$ d) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$

Lời giải

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2-x+2\geq 0 \\ x^3-x+1=-2x^2-x+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x^3+2x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\leq x\leq \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x^2\geq 0 \\ 2x^2+3x-1=\ 3-x^2\ ^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3} \\ x^4-8x^2-3x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3} \\ x-1\quad x+2\quad x^2-x-5\ =0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

c) ĐKXĐ: $-4\leq x\leq\frac{1}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x+4}=\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow x+4=1-2x+2\sqrt{(1-2x)(1-x)}+1-x$

$\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{(1-2x)(1-x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ (2x+1)^2=(1-2x)(1-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

d) Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} = x - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x - \dfrac{1}{x} = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x} - 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{-5x^2 + 8x - 3} + \sqrt{5x - 3} = \sqrt{1 - x} + 1$

b) $x^2 + \ 3 - x \ \sqrt{2x - 1} = x \ 3\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{x - 2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} -5x^2 + 8x - 3 \geq 0 \\ 5x - 3 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{5} \leq x \leq 1$

Phương trình $\sqrt{\ 5x - 3 \quad 1 - x\ } + \sqrt{5x - 3} = \sqrt{1 - x} + 1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5x - 3} - 1)(\sqrt{1 - x} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x - 3} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{4}{5}$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}2x^2-5x+2\ge 0\\ 2x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\sqrt{2x-1}-x\sqrt{x-2}\right)+3x-x^2-3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(\sqrt{2x-1}-x\right)+x\left(3-x\right)+\sqrt{2x-1}\left(x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}-x)(\sqrt{x-2}-3+x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=x\\ \sqrt{x-2}=3-x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=x^2\\ \begin{cases}3-x\ge 0\\ x-2=\left(3-x\right)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=0\\ \begin{cases}x\le 3\\ x^2-7x+11=0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\le 3\\ x=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge 2$ suy ra $x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình $5\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}\right)=5x^2-31x+41$

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases}x+3\ge 0\\ 3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -3\\ x\ge \dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge \dfrac{2}{3}$

Phương trình tương đương với

$\left(5\sqrt{x+3}-x-9\right)+\left(5\sqrt{3x-2}-3x-2\right)=5x^2-35x+30$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+7x-6}{5\sqrt{x+3}+x+9}+\dfrac{-x^2+7x-6}{5\sqrt{3x-2}+3x+2}=5x^2-35x+30$

$\Leftrightarrow \left(x^2-7x+6\right)\left(\dfrac{1}{5\sqrt{x+3}+x+9}+\dfrac{1}{5\sqrt{3x-2}+3x+2}+5\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=6$.

Nhận xét: Ở phương trình đầu (câu a) dễ thấy $x=1, x=6$ là nghiệm do đó ta tìm cách làm xuất hiện nhân tử chung x^2-7x+6. Đối với $5\sqrt{x+3}$ ta ghép thêm với $\alpha x+\beta$, như thế sau khi trục căn thức ta có $5\sqrt{x+3}-\left(\alpha x+\beta\right)=\dfrac{25\left(x+3\right)-\left(\alpha x+\beta\right)^2}{5\sqrt{x+3}+\left(\alpha x+\beta\right)}$ như vậy để có đại nhân tử x^2-7x+6 thì $\begin{cases} 5\sqrt{1+3}-\left(\alpha+\beta\right)=0 \\ 5\sqrt{6+3}-\left(\alpha.6+\beta\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=9 \end{cases}$. Hoàn toàn tương tự với đại lượng $5\sqrt{3x-2}$. Do đó ta tách được như lời giải ở trên.

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau

a) $x+1\geq\sqrt{2(x^2-1)}$ b) $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$

c) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$ d) $(x-3)\sqrt{x^2-4}\leq x^2-9$

Lời giải

a) Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-1)\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ 2(x^2-1)\leq(x+1)^2 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{array}\right. \\ x\geq -1 \\ x^2-2x-3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -1 \end{array}\right. \\ x\geq -1 \\ 1\leq x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 1\leq x\leq 3 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-1\right\}\cup\left[1;3\right]$.

b) Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4(x-1)<0 \\ (x+5)(3x+4)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ (x+5)(3x+4)>16(x-1)^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<1\\ \left[\begin{array}{l} x\ge -\frac{4}{3}\\ x\le -5\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases} x\ge 1\\ 13x^2-51x-4<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<1\end{array}\right.\\ \begin{cases} x\ge 1\\ -\frac{1}{13}<x<4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<1\\ 1\le x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<4\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-5]\cup[-\frac{4}{3};4)$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} 5x-1\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 2x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5x-1}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-4}$

$\Leftrightarrow x+2>\sqrt{2x-4\quad x-1}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4>2x^2-6x+4$ (do $x\ge 2$)

$\Leftrightarrow x^2-10x<0 \Leftrightarrow 0<x<10$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình $S=[2;10)$

d) $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$

ĐKXĐ: $x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.$

Nhận xét $x=3$ là nghiệm bất phương trình

+) Với $x>3$: ta có

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \le x+3$

$\Leftrightarrow x^2-4 \le (x+3)^2 \Leftrightarrow x \ge -\frac{13}{6}$

Kết hợp với điều kiện $x > 3$ ta có tập nghiệm bất phương trình là $S = (3;+\infty)$.

+) Với $x < 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \ge x+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \le 0 \\ x^2-4 \ge 0 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x^2-4 \ge (x+3)^2 \end{cases}$ (II)

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \le -3$

(II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 6x+13 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \le -\frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \le -\frac{13}{6}$

Kết hợp với điều kiện $x < 3$ suy ra bất phương trình có tập nghiệm $S = (-\infty;-\frac{13}{6}]$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = (-\infty;-\frac{13}{6}] \cup [3;+\infty)$

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$ b) $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.

c) $8\sqrt{\frac{2x-3}{x+1}} + 3 \ge 6\sqrt{2x-3} + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$

Lời giải

a) * Nếu $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 51 - 2x - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{51 - 2x - x^2} < 1 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - \sqrt{52} \leq x \leq 1 + \sqrt{52} \\ x^2 > 25 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{52} \leq x < -5.$$

* Nếu $x > 1 \Rightarrow$ luôn đúng vì $VT < 0 < 1$.

Vậy nghiệm tập bất phương trình đã cho là $S = [1 - \sqrt{52}; -5) \cup \ 1; +\infty$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2 \geq 16 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{array}\right. \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$ kết hợp với điều kiện $x \geq 4$ ta có bất phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2x < 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x \geq 4 \\ 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases}$ (II)

Ta có $I \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$

$$II \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x \leq 10 + \sqrt{34} \end{cases} \Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x \leq 5$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \ 10 - \sqrt{34}; +\infty$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq \dfrac{3}{2}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 8\sqrt{2x-3}+3\sqrt{x+1}=6\sqrt{(2x-3)(x+1)}+4$

$\Leftrightarrow 4(2\sqrt{2x-3}-1)+3\sqrt{x+1}\ \ 1-2\sqrt{2x-3}\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \ 2\sqrt{2x-3}-1\ \ \ 4-3\sqrt{x+1}\ \ \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(8x-13)(7-9x)}{2\sqrt{2x-3}+1\ \ \ 4+3\sqrt{x+1}}\geq 0$

$\Leftrightarrow (8x-13)(7-9x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{9}\leq x\leq \dfrac{13}{8}$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm bất phương trình là: $S=\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{13}{8}\right]$.

Loại 2: **Đặt ẩn phụ**
Ví dụ 6: Giải các bất phương trình sau

a) $\ x+1\ \ \ x+4\ \ <5\sqrt{x^2+5x+28}$

b) $\ x+1\ \ \ x-3\ \ <\dfrac{1-x^2+2x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

c) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

d) $3\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}<2x+\dfrac{1}{2x}-7$

Lời giải

a) Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+28}, t>0 \Rightarrow x^2+5x+4=t^2-24$

Bất phương trình trở thành $t^2-24<5t$

$\Leftrightarrow t^2-5t-24<0 \Leftrightarrow -3<t<8$

Suy ra $\sqrt{x^2+5x+28}<8 \Leftrightarrow x^2+5x-36<0 \Leftrightarrow -9<x<4$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \ -9;4$

b) ĐKXĐ: $-x^2+2x+3>0 \Leftrightarrow -1<x<3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow (x^2-2x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}<1-x^2+2x$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+3},\ t>0 \Rightarrow -x^2+2x=t^2-3$.

Bất phương trình trở thành $-t^3<-2+t^2 \Leftrightarrow t^3+t^2-2>0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)>0 \Leftrightarrow t>1$

Do đó ta có $\sqrt{-x^2+2x+3}>1 \Leftrightarrow -x^2+2x+3>1$

$\Leftrightarrow x^2-2x-2<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$.

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm bất phương trình là

$S = \ 1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} 7x+7\ge 0 \\ 7x-6\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{6}{7}$:

Đặt : $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}, t\ge 0$

$\Rightarrow t^2=7x+7+7x-6+2\sqrt{\ 7x+7\quad 7x-6\ }$

$\Rightarrow 14x+2\sqrt{\ 7x+7\quad 7x-6\ }=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $t^2+t-1<181$

$\Leftrightarrow t^2+t-182<0 \Leftrightarrow -14<t<13$

Ta có $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13$

$$\Leftrightarrow \sqrt{49x^2+7x-42} < 84-7x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 12 \\ 49x^2+7x-42 < \left(84-7x\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 12 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x < 6$$

Đối chiếu với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=[\frac{6}{7};6)$

d) ĐKXĐ: $x>0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)-7$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, t>0 \Rightarrow t^2 = x+\dfrac{1}{4x}+1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{4x}=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $3t < 2\left(t^2-1\right)-7$

$$\Leftrightarrow 2t^2-3t-9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ t<-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t>3 \text{(do } t>0\text{)}$$

Ta có $\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>3 \Leftrightarrow x+1+\dfrac{1}{4x}>9$

$$\Leftrightarrow 4x^2-36x+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{8+3\sqrt{7}}{2} \\ x<\dfrac{8-3\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm bất phương trình là

$$S=\left(0;\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2};+\infty\right)$$

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình

a) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$ b) $1>\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{x^2-1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-4\text{x}+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $\text{x}>0$, bất phương trình tương đương với $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-4}\geq 3$

Đặt $t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}, t>0\Rightarrow t^2-2=x+\dfrac{1}{x}$, bất phương trình trở thành $\sqrt{t^2-6}\geq 3-t$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-t<0 \\ \begin{cases} 3-t\geq 0 \\ t^2-6\geq (3-t)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ \begin{cases} t\leq 3 \\ t\geq \dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow t\geq \dfrac{5}{2}$

Từ đó ta có $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq \dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}+2\geq \dfrac{25}{4}$

$\Leftrightarrow 4x^2-17x+4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 4 \\ x\leq \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình đã cho là

$\text{S}=\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$

b) ĐKXĐ: $1-x^2>0\Leftrightarrow -1<x<1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-x^2}-1+2>\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1-x^2} - 3\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0$.

Đặt $t = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ta có bất phương trình : $t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 2 \end{array}\right.$

$* \ t < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ \begin{cases} 0 \le x < 1 \\ 1 - x^2 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ 0 \le x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$* \ t > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 2 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 > 4(1-x^2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T = \left(-1; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$.

Ví dụ 8: Giải các bất phương trình sau

a) $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{\left(x+2\right)^3} - 6x \ge 0$ b) $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 \le \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \ge -2$.

Đặt $y = \sqrt{x+2}$, điều kiện $y \ge 0$.

Bất phương trình trở thành: $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\left(x+2y\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + 2y \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = x \\ 2\sqrt{x+2} \ge -x \end{array}\right.$

Với $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Với $2\sqrt{x+2} \ge -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ \begin{cases} x \le 0 \\ 4(x+2) \ge x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ 2-2\sqrt{3} \le x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 2-2\sqrt{3}$.

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left[2-2\sqrt{3};+\infty\right)$$

b) Bất phương trình tương đương với $\left(x+1\right)^3 - 7x^2 - 8x + 5 \le \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^3 + x + 1 \le \sqrt[3]{7x^2+9x-4} + 7x^2 + 9x - 4$

Đặt $a = x+1,\ b = \sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, bất phương trình trở thành :

$a^3 + a \le b^3 + b \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right) + a - b \le 0$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2+1\right) \le 0 \Leftrightarrow a \le b$ (do $a^2+ab+b^2+1 > 0$)

Suy ra $x+1 \le \sqrt[3]{7x^2+9x-4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-5\right)\left(x^2-x+1\right) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \le x \le 5 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};5\right]$.

Ví dụ 9: Cho phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x-x^2} = m$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất

b) Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm.

Lời giải

ĐKXĐ: $0 \le x \le 1$

a) Giả sử phương trình cso nghiệm duy nhất x_0 tức là ta có

$\sqrt{x_0} + \sqrt{1 - x_0} + \sqrt{x_0(1 - x_0)} = m$ ta có thể viết lại là

$\sqrt{1 - x_0} + \sqrt{x_0} + \sqrt{(1 - x_0)x_0} = m$ do đó $1 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$

thay vào ta có $m = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$

Với $m = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ ta có phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - x^2} = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x(1 - x)} \le \dfrac{x + 1 - x}{2} = \dfrac{1}{2}$

Mặt khác $\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{x(1 - x)} \le 2 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \le \sqrt{2}$

Suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - x^2} \le \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất

Vậy $m = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x(1 - x)}$

Theo câu a ta có $1 \le \left(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{x(1 - x)} \le 2$

Suy ra $1 \le t \le \sqrt{2}$

Phương trình trở thành $t + \dfrac{t^2 - 1}{2} = m \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 2m$ (**)

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm thỏa mãn $1 \le t \le \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = t^2 + 2t - 1$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$ cắt đường thẳng $y = 2m$.

Xét hàm số $y = t^2 + 2t - 1$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$

Bảng biến thiên

t	1	$\sqrt{2}$
y	$1+2\sqrt{2}$ 0	

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \le 2m \le 1 + 2\sqrt{2}$ hay $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 10: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \ge 1$

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} \ge 2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \ge 1$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+1} > 0$ ta có

Bất phương trình tương đương với $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + m \ge 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \dfrac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 < t < 1, \forall x \ge 1$

Bất phương trình trở thành: $3t^2 + m \ge 2t \Leftrightarrow -3t^2 + 2t \le m$ (*).

Bất hương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \ge 1 \Leftrightarrow (*)$ nghiệm đúng $t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{0;1} f\;\;t$ với $f\;\;t\;\; = -3t^2 + 2t$.

Xét hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1]$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f(t)$	0 ↗	$\frac{1}{3}$	↘ -1

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[0;1]} f(t) = \frac{1}{3}$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$

Vậy $m \geq \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Loại 3: **Phương pháp đánh giá**

Đối với phương trình ta thường làm như sau

Cách 1: Tìm một nghiệm và chứng minh nó là nghiệm duy nhất.

Cách 2: Biến đổi hằng đẳng thức đưa về bất phương trình $f(x) = 0$ trong đó $f(x)$ là tổng các bình phương.

Cách 3: Với phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D

Nếu $\begin{cases} f(x) \geq m(x) \\ g(x) \leq m(x) \end{cases}, \forall x \in D$ thì $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m(x) \\ g(x) = m(x) \end{cases}$.

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{\frac{6}{3-x}} + \sqrt{\frac{8}{2-x}} = 6$ b) $\sqrt{x-1} + x\sqrt{x^3 - 3x + 2} = 1 - x$

c) $\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$ d) $\sqrt[4]{x+8} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x < 2$.

Ta thấy rằng phương trình có một nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}$ và ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất .

Thật vậy

* Với $x<\dfrac{3}{2}$ ta có $\dfrac{6}{3-x}>4\Rightarrow\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}>2$ và $\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}>\sqrt{\dfrac{8}{2-\dfrac{3}{2}}}=4$

$\Rightarrow\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}>6\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $\dfrac{3}{2}<x<2$ ta có $\dfrac{6}{3-x}<4\Rightarrow\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}<2$ và $\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}<\sqrt{\dfrac{8}{2-\dfrac{3}{2}}}=4$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}<6\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{3}{2}$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x^3-3x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ (x-1)^2(x+2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1$

Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình

Với $x>1$ ta có $\sqrt{x-1}+x\sqrt{x^3-3x+2}>0,\ 1-x<0$ do đó phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

c) Rõ ràng phương trình có nghiệm phải thỏa mãn $\begin{cases}x\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1$ (*)

Phương trình tương đương với $\sqrt{x}=\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+1$

Do $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+1\ge 1\Rightarrow\sqrt{x}\ge 1\Rightarrow x\ge 1$ (**)

Từ (*) và (**) phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Thử $x=1$ vào thấy không là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) ĐKXĐ: $x\ge 0$

Phương trình tương đương với $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}=\sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}$

Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình

Với $x>1$ ta có $2x+3>x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}>0$

Và $x-1 \quad 9x+8 \quad >0 \Leftrightarrow 9x^2-x-8>0 \Leftrightarrow x+8<9x^2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}<0$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Với $0\le x<1$ ta có $2x+3<x+4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}<0$

Và $x-1 \quad 9x+8 \quad >0 \Leftrightarrow 9x^2-x-8>0 \Leftrightarrow x+8>9x^2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}>0$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình cso nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 12: Giải các phương trình sau

a) $x^2-9x+28=4\sqrt{x-1}$

b) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2-x^2$

c) $20x+38=4\sqrt{x+1}+6\sqrt{2x+3}+12\sqrt{2x^2+5x+3}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge 1$

Phương trình tương đương với $x^2-10x+25+\quad x-1\quad -4\sqrt{x-1}+4=0$

$\Leftrightarrow (x-5)^2+(\sqrt{x-1}-2)^2=0$ (*)

Vì $(x-5)^2+(\sqrt{x-1}-2)^2\ge 0$ với mọi x nên

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} 1-2x\ge 0 \\ 1+2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

Phương trình tương đương với $\quad \sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}\quad ^2 = \quad 2-x^2\quad ^2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-4x^2}=4-4x^2+x^4 \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-4x^2}-1\quad ^2+x^4=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{1-4x^2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1$

Phương trình tương đương với

$\quad x+1-4\sqrt{x+1}+4\quad +\quad 2x+3-6\sqrt{x+1}+9\quad +\quad 9x+9-12\sqrt{(x+1)(2x+3)}+8x+12\quad =0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)^2+(\sqrt{2x+3}-3)^2+(3\sqrt{x+1}-2\sqrt{2x+3})^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-2=0 \\ \sqrt{2x+3}-3=0 \\ 3\sqrt{x+1}-2\sqrt{2x+3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 13: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

b) $\dfrac{2x^2+x-1}{1+3\sqrt{x+1}}=\sqrt{x(x-1)}$

c) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

Lời giải

a) Giả sử PT có nghiệm x. Theo bất đẳng thức côsi ta có :

$$\sqrt{1.(x^2+x-1)}\le\frac{1+x^2+x-1}{2}=\frac{x^2+x}{2}$$

$$\sqrt{1.(-x^2+x+1)}\le\frac{1-x^2+x+1}{2}=\frac{-x^2+x+2}{2}$$

Cộng vế với vế ta được $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}\le x+1$

Suy ra $x^2-x+2\le x+1\Leftrightarrow (x-1)^2\le 0\Leftrightarrow x=1$

Thử lại thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Giả sử phương trình có nghiệm, khi đó nghiệm của nó phải thỏa mãn

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x(x-1)\ge 0 \\ 2x^2+x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-1\}\cup[1;+\infty)$$

Rõ ràng $x=-1$ không là nghiệm của phương trình, ta xét $x\ge 1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x^2+x-1=\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{x(x^2-1)}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$\sqrt{x^2-x} \le \frac{x^2-x}{2}$, $3\sqrt{x(x^2-1)} \le \frac{3\ \ x+x^2-1}{2}$

Suy ra $VP(*) \le \frac{x^2-x}{2} + \frac{3\ \ x+x^2-1}{2} = 2x^2+x-1 = VT(*)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Thử lại phương trình ta thấy $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) ĐKXĐ: $x^3-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{2}$

Giả sử phương trình có nghiệm

Sử dụng bất đẳng thức côsi, ta được $\sqrt[3]{x^2-1} \le \frac{2(x-1)+(x+1)+4}{6} = \frac{x+1}{2}$.

Kết hợp với phương trình suy ra $\frac{x+1}{2}+x \ge \sqrt{x^3-2}$

$\Leftrightarrow 4(x^3-2) \le (3x+1)^2 \Leftrightarrow (x-3)(4x^2+3x+3) \le 0 \Leftrightarrow x \le 3$

Như vậy ta có $\sqrt[3]{2} \le x \le 3$. (**)

Ta có $\sqrt[3]{x^2-1} \ge x-1 \Leftrightarrow x+1 \ge (x-1)^2 \Leftrightarrow x(3-x) \ge 0$ (đúng với đk (**))

và $\sqrt{x^3-2} \le 2x-1 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-x+1) \le 0$ (đúng với đk (**))

Suy ra $\sqrt[3]{x^2-1}+x \ge 2x-1 \ge \sqrt{x^3-2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=3$. Thử lại ta thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.
Nhận xét: Với điều kiện xác định của phương trình thì việc đánh giá của chúng ta khó khăn, đôi khi là không thể đánh giá vì miền của biến lúc đó rộng không đảm bảo cho việc đánh giá. Do đó ràng buộc thêm điều kiện đối với nghiệm của phương trình giúp chúng ta thuận lợi trong đánh

giá từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình sau

a) $x^2+\frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}}>2x$ b) $2x^2-11x+21\le 3\sqrt[3]{4x-4}$

Lời giải

a) ĐKXĐ : $-x^2+6x-5>0\Leftrightarrow 1<x<5$

Ta có $x^2+\frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}}=x^2+\frac{2}{\sqrt{-\left(x-3\right)^2+4}}\ge x^2+1$ (1)

Mặt khác $x^2+1\ge 2x$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ suy ra $x^2+1>2x,\ \forall x\in\left(1;5\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có với mọi $x\in\left(1;5\right)$ ta có

$x^2+\frac{2}{\sqrt{-x^2+6x-5}}>2x$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(1;5\right)$.

b) Xét tam thức $f\left(x\right)=2x^2-11x+21$, có $a=2>0,\ \Delta=-47<0$

Suy ra $f\left(x\right)>0,\ \forall x$

Do đó phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn $3\sqrt[3]{4x-4}>0\Leftrightarrow x>1$

Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$3\sqrt[3]{4x-4}=3\sqrt[3]{2.2\left(x-1\right)}\le 2+2+x-1=x+3$

Kết hợp với phương trình suy ra $2x^2-11x+21\le x+3$

$\Leftrightarrow 2\left(x-3\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=3$

Thử $x=3$ ta thấy là nghiệm của bất phương trình

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.120: Giải các bpt sau :

$a.\ \sqrt{x-3} < 2x-1$ $\qquad$ $b.\ \sqrt{x^2-x+1} \le x+3$

$c.\ \sqrt{3x-2} > 4x-3$ $\qquad$ $d.\ \sqrt{3x^2+x-4} \ge x+1$

lời giải

Bài 4.120: a) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ x-3\ge 0 \\ x-3<(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ x\ge 3 \\ 4x^2-5x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$

b) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1\ge 0 \\ x+3\ge 0 \\ x^2-x+1\le (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{8}{7}$

c) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3<0 \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 4x-3\ge 0 \\ 3x-2>(4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}\le x<\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{3}{4}\le x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le x<1$

d) Bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1\le 0 \\ 3x^2+x-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1>0 \\ 3x^2+x-4\ge (x+1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{4}{3} \\ x\ge \dfrac{1+\sqrt{41}}{4} \end{array}\right.$

Bài 4.121: Giải các bất phương trình sau.

a) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$

c) $x^2+3x+1\le (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

lời giải

Bài 4.121: a) Ta xét hai trường hợp

TH 1: $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=2, x=-\frac{1}{2}$. Khi đó BPT luôn đúng

TH 2: Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3-2>0 \\ x^2-3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \text{ V } x>2 \\ x\le 0 \text{ V } x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2} \text{ V } x\ge 3$.

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $T=(-\infty;-\frac{1}{2}]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$.

b) ĐK: $x\ge -1$

* Với $x=0$ ta thấy Bpt luôn đúng

* Với $x\ne 0 \Rightarrow 1-\sqrt{x+1}\ne 0$. Nhận lượng liên hợp ở VT của Bpt ta được

$$\frac{x^2(1-\sqrt{x+1})^2}{(1+\sqrt{x+1})^2(1-\sqrt{x+1})^2}>x-4 \Leftrightarrow (1-\sqrt{x+1})^2>x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}<3 \Leftrightarrow x<8$$

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $T=[-1;8)$.

c) Bất phương trình $\Leftrightarrow x(x+3)-(x+3)\sqrt{x^2+1}+1\le 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2+1})^2-x^2\le 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1}-x \quad \sqrt{x^2+1}-3 \quad \le 0$ (*)

Do $\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge 0$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\le 3 \Leftrightarrow x^2\le 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$.

Vậy $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài 4.122: Giải các bpt sau :

$a)\ \sqrt{2x-1} \le 8-x$ $\qquad$ $b)\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0$

$c)\ \sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{x+3} \ge \sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}$,

$e)\ \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} < \sqrt{x}$ $\qquad$ $f)\ \dfrac{2x^2}{3-\sqrt{9+2x}\ ^2} < x+21$

lời giải

Bài 4.122: a) $bpt \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \ge 0 \\ 2x-1 \ge 0 \\ 2x-1 \le (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2-18x+65 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x \le 5$

b) $bpt \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+1} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ 2x^2-6x+1 \ge 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x^2-6x+1 \ > \ x-2\ ^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x \ge \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$ hoặc

$\begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x \le \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$

c) ĐS: $3 < x \le 5$

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 2x-8 \ge 0 \Leftrightarrow 4 \le x \le 7 \\ 7-x \ge 0 \end{cases}$

$bpt \Leftrightarrow x+3 \ge \ \sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}\ ^2 \Leftrightarrow 3 \ge -1+2\sqrt{\ 2x-8 \quad 7-x}$

$\Leftrightarrow 2 \ge \sqrt{\ 2x-8 \quad 7-x} \Leftrightarrow 4 \ge -2x^2+22x-56$

$\Leftrightarrow x^2-11x+30 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 5 \\ x \ge 6 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $\left[\begin{array}{l} 4 \le x \le 5 \\ 6 \le x \le 7 \end{array}\right.$

e) ĐKXĐ : $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0$

$bpt \Leftrightarrow \sqrt{x+2}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Leftrightarrow x+2<2x+1+2\sqrt{(x+1)x}$

$\Leftrightarrow 1-x<2\sqrt{(x+1)x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x<0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 1-x\ ^{2}<4x(x+1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $x>\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$

f) ĐKXĐ : $\begin{cases} 9+2x\geq 0 \\ 3-\sqrt{9+2x}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{9}{2} \\ x\neq 0 \end{cases}$

$bpt \Leftrightarrow \dfrac{2x^2\ \ 3+\sqrt{9+2x}\ ^{2}}{4x^2}<x+21 \Leftrightarrow \sqrt{9+2x}<4 \Leftrightarrow x<\dfrac{7}{2}$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $\begin{cases} -\dfrac{9}{2}\leq x<\dfrac{7}{2} \\ x\neq 0 \end{cases}$

Bài 4.123: Giải các bất phương trình sau :

$a)\ \dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2 \qquad b)\ \sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

$c)\ \sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\le\sqrt{4x^2-18x+18}$ $\quad d)\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 2-\dfrac{x^2}{4}$

lời giải

Bài 4.123: a) ĐKXĐ : $\begin{cases}-1\le x\le\dfrac{4}{3}\\ x\ne 0\end{cases}$:

Với $0<x\le\dfrac{4}{3}$: $BPT\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2\Leftrightarrow\sqrt{-3x^2+x+4}<2x-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2\ge 0\\ -3x^2+x+4<\ \ 2x-2\ \ ^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 7x^2-9x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{9}{7}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{9}{7}<x\le\dfrac{4}{3}$

Với $-1\le x<0$: bpt luôn đúng

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $\left[\begin{array}{l}-1\le x<0\\ \dfrac{9}{7}<x\le\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\ x^2-4x+3\ge 0\\ x^2-5x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ x\le 1\end{array}\right.$

$bpt\Leftrightarrow\sqrt{\ x-1\quad x-2\ }+\sqrt{\ x-1\quad x-3\ }\ge 2\sqrt{\ x-1\quad x-4\ }$

Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của bpt.

+ Với $x<1$: Bpt$\Leftrightarrow\sqrt{\ 1-x\quad 2-x\ }+\sqrt{\ 1-x\quad 3-x\ }\ge 2\sqrt{\ 1-x\quad 4-x\ }$

$\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\ge 2\sqrt{4-x}$

Ta có : $\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}<\sqrt{4-x}+\sqrt{4-x}=2\sqrt{4-x}$

Suy ra $x<1$ bpt vô nghiệm .

+) Với $x \geq 4$: $bpt \Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$

Ta có : $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} \geq \sqrt{x-4}+\sqrt{x-4} = 2\sqrt{x-4}, \forall x, x \geq 4$

Suy ra : $x \geq 4$ bất pt luôn đúng .

Vậy nghiệm của bpt là : $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$

c) ĐS: $x \leq -5,\ x = 3,\ 5 \leq x \leq \dfrac{17}{3}$

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$:

Khi đó : $bpt \Leftrightarrow 1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2} \leq 4-x^2+\dfrac{x^4}{16}$

$\Leftrightarrow\ \ 1-x^2-2\sqrt{1-x^2}+1\ \ +\dfrac{x^4}{16} \geq 0$

$\Leftrightarrow\ \ \sqrt{1-x^2}-1\ ^{2}+\dfrac{x^4}{16} \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy nghiệm của bpt là : $-1 \leq x \leq 1$

Bài 4.124: Giải các bất phương trình sau:

a) $4(x+1)^2 \geq (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$ b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \geq x$

c) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x} > 3$ d) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{2x+1}-1$

e) $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x} < 2$ f) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} > \dfrac{2}{x}$

g) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$

h) $\sqrt{9x^2+16}\ \ \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}\ \ > 12x-8$

lời giải

Bài 4.124: a) $bpt \Leftrightarrow 4(x+1)^2\left[\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2-2x+10\right]\geq 0$

ĐS: $x=-1, x\geq 3$

b) $0\leq x\leq 1$ c) $0\leq x\leq 5$ d) $0<x<\frac{45}{8}$

e) $-1\leq x<0, \frac{9}{7}<x\leq\frac{4}{3}$ f) $x>\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ g) $x>\frac{17}{3}$

h) $bpt \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+16}\left(3x-2\right)>2\left(3x-2\right)\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)$

Chia hai trường hợp và giải ta được $-2\leq x<\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}<x\leq 2$

Bài 4.125: Giải các bất phương trình sau:

$a)\ \sqrt{3x^2+6x+4}<2-2x-x^2$ $b)\ 2x^2+4x+3\sqrt{3-2x-x^2}>1$

$c)\ \sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}\geq 1$ $d)\ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{3}{2}$

$e)\ 5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}+4$ $f)\ \frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}>3$ $g)\ x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$

lời giải

Bài 4.125: a) Đặt : $t=\sqrt{3x^2+6x+4}, t\geq 0\Rightarrow x^2+2x=\frac{t^2-4}{3}$

Bất phương trình trở thành $t<2-\frac{t^2-4}{3}$

$\Leftrightarrow t^2+3t-10<0\Leftrightarrow 0\leq t<2(t\geq 0)$

Ta có $\sqrt{3x^2+6x+4}<2\Leftrightarrow 3x^2+6x+4<4$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x<0 \Leftrightarrow -2<x<0$

Vậy nghiệm bpt là $-2<x<0$.

b) ĐKXĐ: $-3 \le x \le 1$

Đặt : $t=\sqrt{3-2x-x^2}, t \ge 0 \Rightarrow t^2=3-2x-x^2 \Rightarrow 2x+x^2=3-t^2$

Bất phương trình trở thành $2\ \ 3-t^2\ \ +3t>1$

$\Leftrightarrow 2t^2-3t-5<0 \Leftrightarrow 0 \le t<\frac{5}{2}(dot \ge 0)$

Ta có $\sqrt{3-2x-x^2}<\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ 3-2x-x^2<\frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$

Vậy nghiệm bpt là $-3 \le x \le 1 -2<x<0$.

c) ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{2}{3} \\ x \le -1 \end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{3x^2+5x+2}, t \ge 0 \Rightarrow 3x^2+5x=t^2-2$

Bất phương trình trở thành $\sqrt{t^2+5}-t \ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5} \ge t+1 \Leftrightarrow t^2+5 \ge\ \ t+1\ \ ^2 \Leftrightarrow t \le 2$

Ta có $\sqrt{3x^2+5x+2} \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5x+2 \ge 0 \\ 3x^2+5x+2 \le 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{2}{3} \\ x \le -1 \end{array}\right. \\ -2 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x \le -1 \\ \frac{-2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \end{array}\right.$

d) ĐKXĐ: $x \ge 1$

$bpt \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right| > \frac{3}{2}$

Đặt $t=\sqrt{x-1}, t \ge 0$

Bất phương trình trở thành $t+1+\left|t-1\right| > \frac{3}{2}$ (*)

+) Với $t \ge 1$ ta có $(*) \Leftrightarrow 2t > \frac{3}{2} \Leftrightarrow t > \frac{3}{4}$

Suy ra nghiệm bpt(*) là $t \ge 1$ do đó $\sqrt{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$

+) Với $0 \le t < 1$ ta có $(*) \Leftrightarrow 2 > \frac{3}{2}$ đúng mọi t

Do đó $0 \le \sqrt{x-1} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm bpt là $x \ge 1$

e) ĐKXĐ : $x > 0$

$bpt \Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2x+\frac{1}{2x}+4$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}, t \ge \sqrt{2} \Rightarrow x+\frac{1}{4x}=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $5t < 2\left(t^2-1\right)+4 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \frac{1}{2} \\ t > 2 \end{array}\right.$

Vì $t \ge \sqrt{2} \Rightarrow t > 2$ ta có $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow 2x-4\sqrt{x}+1 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{x} < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{x} > \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x > \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm bpt là $0 < x < \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ và $x > \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

f) ĐKXĐ: $x < -1,\ x > 0$

Đặt: $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}, t > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{t^2}$

Ta được : $\dfrac{1}{t^2} - 2t > 3 \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \ \ t+1 \ \ \ 2t^2 + t - 1 \ \ < 0$

$\Leftrightarrow 0 < t < \dfrac{1}{2}$ (vì $t > 0$)

Ta có $0 < \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < x < -1$

Vậy nghiệm bpt là $-\dfrac{4}{3} < x < -1$.

g) ĐKXĐ: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$

+) Với $x < -1$: bpt VN

+) Với $x > 1: bpt \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{x^2}{x^2-1} + 2.\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{1225}{144}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1} + 2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1225}{144} > 0$$

Đặt : $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, t > 0$, bất phương trình trở thành

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - \dfrac{1225}{144} > 0 \Leftrightarrow t > \dfrac{25}{12} (dot > 0)$

Do đó ta có $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{25}{12} \Leftrightarrow 144x^4 > 625x^2 - 625$

$\Leftrightarrow 144x^4 - 625x^2 + 625 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x^2 < \dfrac{25}{16} \\ x^2 > \dfrac{25}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < \dfrac{5}{4} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{array}\right. (\text{do} x > 1)$

Bài 4.126: Giải các phương trình sau:

a) $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \dfrac{(2x-1)^2}{2}$

c) $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$

d) $\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3$

lời giải

Bài 4.26: a) ĐKXĐ: $1 \le x \le 7$.

Ta có: PT $\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{7-x} - 2\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x \quad x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \quad \sqrt{x-1} - 2 \quad - \sqrt{7-x} \quad \sqrt{x-1} - 2 \quad = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} - 2 \quad \sqrt{x-1} - \sqrt{7-x} \quad = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

b) ĐKXĐ: $\dfrac{-1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2=\dfrac{(4x^2-4x+1)^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{-4x^2+4x+3}=\dfrac{(4x^2-4x+1)^2}{4}$.

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+4x+3}=\sqrt{4-(2x-1)^2} \Rightarrow 0\le t\le 2$. Ta có phương trình :

$16+8t=(4-t^2)^2 \Leftrightarrow t^4-8t^2-8t=0 \Leftrightarrow t(t^3-8t-8)=0$

$\Leftrightarrow t(t+2)(t^2-2t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \ \text{(n)} \\ t=1+\sqrt{5} \ \text{(l)} \end{array}\right.$.

$t=0 \Leftrightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $x=-\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) ĐKXĐ: $x\ge \dfrac{5}{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa điều kiện).

Vây $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

d) PT$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+x^3-x^2+2x-9=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x^2+x+4)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^2+x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Bài 4.127: Giải các phương trình sau

a) $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$

b) $\sqrt[3]{14-x^3}=2\sqrt{x^2-2x-1}+2-x$

c) $2\sqrt{1+3x}-\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=5$

lời giải

Bài 4.127: a) Theo côsi ta có:

$\sqrt{2x^2-x}\le\dfrac{2x^2-x+1}{2}$; $\sqrt{1+3x-3x^2}\le\dfrac{2+3x-3x^2}{2}$

Suy ra $\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}\le\dfrac{-x^2+2x+3}{2}$

Mà $\dfrac{-x^2+2x+3}{2}\le 2.$

Dấu bằng xảy ra <=>x=1. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất x=1.

b) ĐKXĐ: $x^2-2x-1\ge 0$

Do $\sqrt{x^2-2x-1}\ge 0$ nên $\sqrt[3]{14-x^3}\ge 2-x$

$\Leftrightarrow 14-x^3\ge 8-12x+6x^2-x^3 \Leftrightarrow x^2-2x-1\le 0$

Suy ra phương trình có nghiệm thì $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

Thử lại ta thấy phương trình cso nghiệm duy nhất $x=1-\sqrt{2}$.

c) ĐK: $x>0$. Áp dụng BĐT **Bunhiacopxky** ta có:

$$1+3x \quad 1+3 \;\ge\; 1+3\sqrt{x} \;^{2} \Rightarrow 2\sqrt{1+3x}\ge 1+3\sqrt{x}$$

Suy ra $2\sqrt{1+3x}-\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\ge 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$ và đó cũng là nghiệm của phương trình.

Bài 4.128: Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}$

lời giải

Bài 4.128: ĐKXĐ: $\begin{cases}2x+3\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-11x+33\ge 0\\ 3x-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{5}{3}$

Phương trình tương đương với

$2\sqrt{\;2x+3\quad x+1}=x^2-11x+24+2\sqrt{\;x^2-11x+33\quad 3x-5}$

$\Leftrightarrow 2\;\left(\sqrt{\;2x+3\quad x+1}-\sqrt{\;x^2-11x+33\quad 3x-5}\;\right)=x^2-11x+24$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{-3x^3+40x-149x+168}{\sqrt{\;2x+3\quad x+1}+\sqrt{\;x^2-11x+33\quad 3x-5}}=x^2-11x+24$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{3\text{x}-7\quad -x^2+11x-24}{\sqrt{\;2x+3\quad x+1}+\sqrt{\;x^2-11x+33\quad 3x-5}}=x^2-11x+24$

$\Leftrightarrow\quad x^2-11x+24\left(\dfrac{2\;\;3x-7}{\sqrt{\;2x+3\quad x+1}+\sqrt{\;x^2-11x+33\quad 3x-5}}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-11x+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=8\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=3$ và $x=8$.

Bài 4.129: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2-2\;\;m+1\;\;x+m^2+m}=x-1\;\;1$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

lời giải

Bài 4.129: Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-2(m+1)x+m^2+m=(x-1)^2 \ (2) \end{cases}$

Đặt $t=x-1$, vì $x-1\ge 0$ nên ta có điều kiện $t\ge 0$, thay vào phương trình (2) ta được phương trình: $t^2-2(m-1)t+m^2-m=0\ (3)$

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (3) có nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (3) có nghiệm $t_1\le 0\le t_2 \Leftrightarrow P\le 0 \Leftrightarrow m^2-m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 1$.

TH2: Phương trình (3) có nghiệm $0\le t_1\le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ P\ge 0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m\ge 0 \\ m^2-m\ge 0 \\ m-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Kết luận: Với $m\in[0;1]$ thì phương trình (1) có nghiệm.

b) Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (3) có 2 nghiệm

$$0\le t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P\ge 0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m^2-m\ge 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ m-1>0 \end{cases}$$

Kết luận: Không tồn tại m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) có đúng 1 nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (3) có nghiệm $t_1<0<t_2 \Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow m^2-m<0 \Leftrightarrow 0<m<1$.

TH2: Phương trình (3) có nghiệm $t_1<0=t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P=0 \\ S<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m^2-m=0 \\ m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$.

TH3: Phương trình (3) có nghiệm $0\le t_1=t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=0 \\ m-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Kết luận: Với $m\in[0;1]$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 4.130: Cho phương trình $x^2-m\sqrt{x^2+1}+3m+2=0 \quad 1$.

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

lời giải

Bài 4.130. ĐK $x\in R$. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}-1 \quad t\ge 0$ suy ra $x^2= \ t+1 \ ^2-1$, thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $t^2- \ m-2 \ t+3m+2=0 \quad 2$

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (2) có nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1\le 0\le t_2 \Leftrightarrow P\le 0\Leftrightarrow 3m+2\le 0\Leftrightarrow m\le \frac{-2}{3}$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm

$$0\le t_1\le t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\ge 0\\ P\ge 0\\ S\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-16m-4\ge 0\\ 3m+2\ge 0\\ m-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 8+\sqrt{68}$$

Kết luận: với $m\in\left(-\infty;\frac{-2}{3}\right]\cup\left[8+\sqrt{68};+\infty\right.$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa:

$$0<t_1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta> 0\\ P> 0\\ S> 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-16m-4> 0\\ 3m+2> 0\\ m-2> 0\end{cases}\Leftrightarrow m> 8+\sqrt{68}$$

Kết luận: Với $m\in \ 8+\sqrt{68};+\infty$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Để pt (1) có nghiệm duy nhất ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Phương trình (2) có nghiệm

$$t_1 < 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m - 4 > 0 \\ 3m + 2 = 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3}.$$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm $0 = t_1 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m - 4 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Kết luận: với $m = \frac{-2}{3}$ thì pt (1) có nghiệm duy nhất.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 4.131: Cho các số thực a, b, c là số thực. Chứng minh rằng:

a) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

b) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

c) $(a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$, với $ab > 0$.

Bài 4.132: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{b^2 + 4bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b+c}{c^2 + 4ca + a^2}} + \sqrt{\frac{c+a}{a^2 + 4ab + b^2}} \geq 3$

Bài 4.133: Cho a, b, c là số dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{b^3}{(c+1)(b+1)} + \frac{c^3}{(a+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4}$

b) $\dfrac{1}{a+2b+3}+\dfrac{1}{b+2c+3}+\dfrac{1}{c+2a+3}\le \dfrac{1}{2}$

Bài 4.134: Giải các bất phương trình sau

$a)$ $x^2-3x-4\le 0$

$b)$ $(1-x)(x^2-5x+6)>0$.

c) $\dfrac{x^3-3x+3}{x^2-x+1}>1$

c) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{2x^3+1}-\sqrt[3]{x+1}}\ge 0$

Bài 4.135: Cho tam thức $f(x)=x^2+2(m-3)x+m+3$. Tìm m để

a) Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm

b) $f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 4.136: Cho tam thức: $f(x)=(m-1)x^2-4(m-1)x+2m+3$. Tìm m để

a) Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm

b) Hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$

Bài 4.137: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2-4x+4\le 0 \\ x^2-3x<0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x^2+x+1>0 \\ 3x^2+2x-3\le 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3-2x}\ge 0 \\ x^2-x-1\le 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-4x+5}\ge x \\ 4x^2+7x-4\le 0 \end{cases}$

Bài 4.138: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình và hệ bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x+2y}{-2}>\dfrac{2x+y}{-3}$

b) $\begin{cases} 2x+y>-3 \\ 2\ \ 3x-y+3\ \ <3\ \ 2x-y+2 \\ x+y+1<0 \end{cases}$

Bài 4.139: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2<0$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{-x^2+9x+6}$

c) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Bài 4.140: Cho bất phương trình: $\frac{9m+4 \quad x}{x^2+x+9}-\frac{7mx}{x^2-x+9}\ge 2$

a) Giải bất phương trình với $m=28$.

b) Tìm m để bất phương trình (1) có nghiệm.

Bài 4.141: Giải các bất phương trình sau:

a) $x^2+\sqrt{2x^2+4x+3}\ge 6-2x$ b) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+5}>x-3$

c) $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2 \quad x^2-x+1}}\ge 1$ d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\ge x-\sqrt{x^2+x-2}-\frac{7}{2}$

Bài 4.142: Tìm *m* để bất phương trình $(x^2+x-1)(x^2+x+m)\ge 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

ĐÁP ÁN

Bài 4.131. a) BĐT ⇔. $(a^2-b^2)^2+(a-c)^2+(a-1)^2\ge 0$.

b) BĐT⇔ $\left(\frac{a}{2}-(b-c)\right)^2\ge 0$ c) BĐT ⇔ $ab(a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

Bài 4.132: a) BĐT tương đương với $\frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c}\ge 8 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c}\ge 8$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{b+c}{a}.\frac{c+a}{b}.\frac{a+b}{c}\ge\frac{2\sqrt{bc}}{a}.\frac{2\sqrt{ca}}{b}.\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8 \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{b^2+4bc+c^2}}+\sqrt{\frac{b+c}{c^2+4ca+a^2}}+\sqrt{\frac{c+a}{a^2+4ab+b^2}}$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{b^2+4bc+c^2}.\frac{b+c}{c^2+4ca+a^2}.\frac{c+a}{a^2+4ab+b^2}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b}{b^2+4bc+c^2}\cdot\frac{b+c}{c^2+4ca+a^2}\cdot\frac{c+a}{a^2+4ab+b^2}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\ (a+b)(b+c)(c+a)\ge (b^2+4bc+c^2)(c^2+4ca+a^2)(a^2+4ab+b^2)\quad (*)$$

Ta có $b^2+4bc+c^2=(b+c)^2+2bc\le (b+c)^2+2.\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{3(b+c)^2}{2}$

Tương tự ta có $c^2+4ca+a^2\le\frac{3(c+a)^2}{2}$ và $a^2+4ab+b^2\le\frac{3(a+b)^2}{2}$

Suy ra $(b^2+4bc+c^2)(c^2+4ca+a^2)(a^2+4ab+b^2)\le\frac{27}{8}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ (1)

Mặt khác $(a+b)(b+c)(c+a)\le\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4.133: a) $\frac{a}{1+b+ab}+\frac{b}{1+c+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=\frac{ac}{c+bc+1}+\frac{ba}{1+ab+1}+\frac{c}{1+a+ab}$

Đặt $P=\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{b+1}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\frac{a+1}{8}\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}a.$$

Tương tự ta có $\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{b+1}{8}\ge\frac{3}{4}b;\ \frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{a+1}{8}\ge\frac{3}{4}c$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được:

$$P+\frac{a+b+c+3}{4}\geq\frac{3}{4}(a+b+c)\Rightarrow P\geq\frac{2(a+b+c)-3}{4}\geq\frac{2.3\sqrt[3]{abc}-3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $a+2b+3=(a+b)+(b+1)+2\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{b}+2$

Suy ra $\dfrac{1}{a+2b+3}\leq\dfrac{1}{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1\right)}$

Tương tự ta có : $\dfrac{1}{b+2c+3}\leq\dfrac{1}{2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1\right)}$, $\dfrac{1}{c+2a+3}\leq\dfrac{1}{2\left(\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1\right)}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}\right)$$

Mặt khác $abc=1$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{a}+1}=1$$

Suy ra $\dfrac{1}{a+2b+3}+\dfrac{1}{b+2c+3}+\dfrac{1}{c+2a+3}\leq\dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 4.134: a) BXD :

x	$-\infty$ -1 4 $+\infty$
VT	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Tập nghiệm : $T = \left[-1;4\right]$

b) BXD :

x	$-\infty$ 1 2 3 $+\infty$
$2-x$	+ 0 − | − | −
x^2-5x+6	+ | + 0 − 0 +
VT	+ 0 − 0 + 0 −

$T = (-\infty;1) \cup \; 2;3$

c) $x > \sqrt{2}, -\sqrt{2} < x < 1$ d) $x = -1;\; x \geq 2$

Bài 4.135: a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-3)x + m + 3 = 0 \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-3)^2 - (m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq 1 \;\cup\; m \geq 6$.

Vậy $m \in (-\infty;1] \cup [6;+\infty)$ là những giá trị cần tìm.

b) $f(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$.

$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 6$

Vậy $1 < m < 6$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.136: a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 4(m-1)x + 2m + 3 = 0 \quad (*)$

- $m = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 5 = 0$ pt vô nghiệm $\Rightarrow m = 1$ loại.

- $m \neq 1$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 4(m-1)^2 - (m-1)(2m+3) = (m-1)(2m-7) \geq 0$

$\Leftrightarrow m < 1 \;\cup\; m \geq \frac{7}{2}$.

Vậy $m \in (-\infty;1) \cup [\frac{7}{2}; +\infty)$ là những giá trị cần tìm.

b) Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

- $m = 1 \Rightarrow f(x) = 5 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn

- $m \neq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta = (m-1)(2m-7) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{7}{2}$

Vậy $1 \leq m \leq \frac{7}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.137: a) $x = 2$ b) $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{10}-1}{3}$

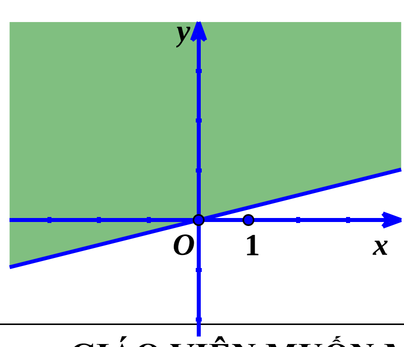
c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ d) $-\frac{7+\sqrt{113}}{8} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Bài 4.138: a) $Bpt \Rightarrow 3\ \ x+2y\ \ < 2\ \ 2x+y\ \ \Leftrightarrow x-4y>0$

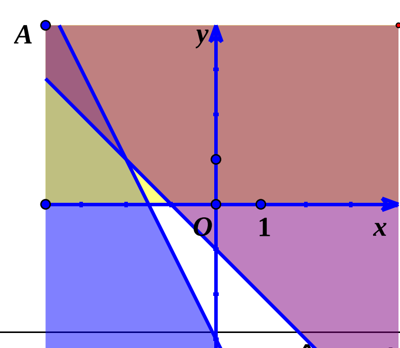
Vẽ đường thẳng $d: x - 4y = 0$

Dễ thấy $1;0$ là nghiệm của bất phương trình $x - 4y > 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d (không kể bờ) chứa điểm $M\ \ 1;0$ (hình a)

b) $Hbpt \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3 > 0 \\ y < 0 \\ x + y + 1 < 0 \end{cases}$ (hình b)



Hình a



Hình b

Bài 4.139: a) bpt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+1} < x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 2x^2-6x+1\ge 0 \\ 2x^2-6x+1<\left(x-2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \text{ V } x\ge \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x^2-2\text{x}-3<0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \le x < 3$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ: $0 \le x \le 9$

Bpt $\Leftrightarrow 9+2\sqrt{9x-x^2} \le -x^2+9x+6 \Leftrightarrow 9x-x^2-2\sqrt{9x-x^2}-3 \ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{9x-x^2},\ t\ge 0$,

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t-3\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 3$

Ta có $\sqrt{9x-x^2}\ge 3 \Leftrightarrow x^2-9x+9\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là: $\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

c) * Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 4 \end{array}\right.$.

$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}\ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (1)

TH1: Nếu $x\le 1$ Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)}\ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{4-x})\ge 0$ (2)

+ Với $x=1$ thoả mãn (2) nên $x=1$ là một nghiệm của bpt.

+Với $x<1$ thì $1-x>0$ nên ta có:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{4-x}\ge 0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}\ge 11-2x$

$\Leftrightarrow x\ge \frac{97}{24}$ không thoả mãn $x<1$

TH2: Nếu $x\ge 4$ Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-4}\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)(x-3)}\ge 2x-11$ (3)

+ Nếu $4\le x\le \frac{11}{2}$ hiển nhiên thoả mãn (3) vì $VP\ge 0\ge VT$

+ Nếu $x>\frac{11}{2}$ ta có: (3) $\Leftrightarrow 4(x-2)(x-3)\ge (2x-11)^2\Leftrightarrow x\ge \frac{97}{24}$

Kết hợp với điều kiện suy ra bpt có nghiệm $x>\frac{11}{2}$.

Tập nghiệm bpt là $S=\{1\}\cup\left[4;+\infty\right)$.

Bài 4.140: TXD: $D=\mathbb{R}$

+) $x=0$ không là nghiệm của pt.

$Bpt \Leftrightarrow \frac{(9m+4)}{x+\frac{9}{x}+1} - \frac{7m}{x+\frac{9}{x}-1} \geq 2$, Đặt $t = x + \frac{9}{x}$, $|t| \geq 6$

a) Với $m = 28$: (1) trở thành: $t^2 - 30t + 225 \leq 0 \Leftrightarrow t = 15$

Ta có $15 = x + \frac{9}{x} \Leftrightarrow x = 15 \pm \sqrt{189}$

b) Bpt trở thành: $f\ t\ = t^2 - \ m + 2\ t + 8m + 1 \leq 0$ (*)

Bpt đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bpt (*) phải có nghiệm t $\in\ -\infty, \ -6] \cup [6, +\infty$.

Ta có bpt (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ m $\in \left(-\frac{49}{14}, 28\right)$

Suy ra bpt đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{49}{14}\right) \cup [28; +\infty)$

Bài 4.141: a) $Bpt \Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 0$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = \sqrt{2(x+1)^2 + 1} \Rightarrow t \geq 1$

BPT trở thành: $\frac{t^2 - 3}{2} - 6 + t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ t \leq -5 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 3 > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right.$

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$

Nhân lượng liên hợp: $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5} > 0$

Bpt $\Leftrightarrow (2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+5})(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$

$\Leftrightarrow 4(x-1) - (x+5) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$

$\Leftrightarrow 3(x-3) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$ (2)

Xét các trường hợp:

TH1: $x > 3$ thì phương trình trở thành: $3 > 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}$

$VP > 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > 3$ nên bất phương trình vô nghiệm.

TH2: $x = 3$ thì $0 > 0$ (vô lý)

TH3: $1 \le x < 3$ nên từ bất phương trình ta suy ra:

$3 < (2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}) \Leftrightarrow 4\sqrt{(x-1)(x+5)} > 8 - 5x$ (*)

$*\begin{cases} 8-5x<0 \\ 1 \le x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{5} < x < 3$ thì (*) luôn đúng

$*\begin{cases} 8-5x \ge 0 \\ 1 \le x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le \frac{8}{5}$

$* \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le \frac{8}{5} \\ 9x^2 - 144x + 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le \frac{8}{5} \\ 8-\sqrt{48} < x < 8+\sqrt{48} \end{cases} \Leftrightarrow 8-\sqrt{48} < x \le \frac{8}{5}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $8-\sqrt{48} < x < 3$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 - 2x + 2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0$.

$Bpt \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)} \le \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \sqrt{x}$.

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn, với $x \ne 0$, đặt $t = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ ta được:

$\sqrt{2\ \ t^2+1\ } \le t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1 \\ \ t-1\ ^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

d) ĐKXĐ: $x \ge 1$. Đặt $t = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

Suy ra: $t^2 = 2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + x - 2} - \frac{7}{2} = \frac{t^2}{2} - 4$

Khi đó bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 8 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le t \le 4$

Với $t \ge -2$ suy ra: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \ge -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 2 \ge \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x + 6 + 4\sqrt{x+2} \ge x - 1 \Leftrightarrow x + 7 + 4\sqrt{x+2} \ge 0$ (đúng $\forall x \ge 1$)

Với $t \le 4$ suy ra: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \le \sqrt{x-1} + 4$

$\Leftrightarrow x + 2 \le x + 15 + 8\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 13 + 8\sqrt{x-1} \ge 0$ (đúng $\forall x \ge 1$)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[1; +\infty\right.$

Bài 4.142: Đặt $t = x^2 + x - 1$ suy ra $t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \ge \frac{-5}{4}$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành: $\mathrm{t}\;\; \mathrm{t} + \mathrm{m} + 1 \;\; \ge 0 \Leftrightarrow t^2 + (m+1)t \ge 0$ (1)

Để bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì (1) phải có tập nghiệm là $\left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$

Xét $f(t) = t^2 + (m+1).t$ ta có 2 trường hợp:

- TH_1: $\frac{-(m+1)}{2} < \frac{-5}{4} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. Khi đó ta lập bảng biến thiên $f(t)$ trên $\left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để $f(t) \ge 0$ với $\forall t \in \left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$ thì: $f\left(\frac{-5}{4}\right) \ge 0$

hay $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}.(m+1) \ge 0 \Leftrightarrow m + 1 \le \frac{5}{4} \Leftrightarrow m \le \frac{1}{4}$

Kết hợp với ĐK trên ta thấy không có m thỏa mãn

- TH_2: $\frac{-(m+1)}{2} \geq \frac{-5}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$ Khi đó ta lập bảng biến thiên $f(t)$ trên $\left[\frac{-5}{4};+\infty\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để $f(t) \geq 0$ với $\forall t \in \left[\frac{-5}{4};+\infty\right)$ thì: $f\left(\frac{-(m+1)}{2}\right) \geq 0$

Hay $\frac{(m+1)^2}{4} - \frac{(m+1)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy ĐK để bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ là $m = -1$

TOÁN 10

CHƯƠNG IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

BIÊN SOẠN VÀ SƯU TẦM

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

Facebook: https://web.facebook.com/phong.baovuong

Page: https://web.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/

Website: http://tailieutoanhoc.vn/

Email: baovuong7279@gmail.com

TÀI LIỆU CÓ SỰ DỤNG TÀI LIỆU THAM KHẢO KHÁC

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng ax^2+bx+c. Trong đó a,b,c là những số cho trước với $a\neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f(x)=ax^2+bx+c$;

$\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau

$f(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0)$	
$\Delta<0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Delta=0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$\Delta>0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
	$a.f(x)<0,\ \forall x\in(x_1;\ x_2)$

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai ax^2+bx+c

- $ax^2+bx+c>0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c<0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: XÉT DẤU CỦA BIỂU THỨC CHỨA TAM THỨC BẬC HAI.**

1. Phương pháp giải.

Dựa vào định lí về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

* Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

* Đối với phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x),Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x),Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra dấu của nó.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét dấu của các tam thức sau

a) $3x^2-2x+1$

A. $3x^2-2x+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $3x^2-2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

C. $3x^2-2x+1<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $3x^2-2x+1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $-x^2+4x+5$

A. $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$

B. $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$

C. $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$

D. $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)$

c) $-4x^2+12x-9$

A. $-4x^2+12x-9<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **B.** $-4x^2+12x-9>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

C. $-4x^2+12x-9<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **D.** $-4x^2+12x-9>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

d) $3x^2-2x-8$

A. $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

B. $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$

C. $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$

D. $3x^2-2x-8>0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$

e) $25x^2+10x+1$

A. $25x^2+10x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **B.** $25x^2+10x+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

C. $25x^2+10x+1<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$ **D.** $25x^2+10x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) $-2x^2+6x-5$

A. $-2x^2+6x-5>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $-2x^2+6x-5\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

C. $-2x^2+6x-5\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $-2x^2+6x-5<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = -2 < 0,\ a = 3 > 0$ suy ra $3x^2 - 2x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Ta có $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2 + 4x + 5$		$-$	0	$+$	|	$-$	

Suy ra $-x^2 + 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$ và $-x^2 + 4x + 5 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

c) Ta có $\Delta' = 0,\ a < 0$ suy ra $-4x^2 + 12x - 9 < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d) Ta có $3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 8$		$+$	0	$-$	|	$+$	

Suy ra $3x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ và $3x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$

e) Ta có $\Delta' = 0,\ a > 0$ suy ra $25x^2 + 10x + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

f) Ta có $\Delta' = -1 < 0,\ a < 0$ suy ra $-2x^2 + 6x - 5 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét:

Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$. Xét nghiệm của tam thức, nếu:

* Vô nghiệm khi đó tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với a với mọi x

* Nghiệm kép khi đó tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$

* Có hai nghiệm $f(x)$ cùng dấu với a khi và chỉ khi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (ngoài hai nghiệm) và $f(x)$ trái dấu với a khi và chỉ khi $x \in (x_1; x_2)$ (trong hai nghiệm)(ta có thể nhớ câu là trong trái ngoài cùng)

Ví dụ 2: Tùy theo giá trị của tham số m, hãy xét dấu của các biểu thức $f(x) = x^2 + 2mx + 3m - 2$

Lời giải

Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$ và $\Delta' = m^2 - 3m + 2$.

* Nếu $1 < m < 2 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0\ \ \forall x \in R$.

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0\ \ \forall x \in R$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -m$

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm

$x_1 = -m - \sqrt{m^2 - 3m + 2}$ và $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - 3m + 2}$. Khi đó:

+) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

+) $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(x_1;x_2)$.

Ví dụ 3: Xét dấu của các biểu thức sau

a) $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$

A. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ dương khi và chỉ khi $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

B. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ âm khi và chỉ khi $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ dương khi và chỉ khi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

D. $\left(-x^2+x-1\right)\left(6x^2-5x+1\right)$ âm khi và chỉ khi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$

A. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(2;4)$,

B. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(2;4)$,

C. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2)$.

D. $\frac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-1;2)\cup(4;+\infty)$.

c) x^3-5x+2

A. x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x\in\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$

B. x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x\in\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$

C. x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x\in\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)$

D. x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x\in\left(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$

d) $x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$

A. $x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(-2;-1)\cup(4;+\infty)$

B. $x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(4;+\infty)$

C. $x-\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(3;4)$

D. $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$

Lời giải

a) Ta có $-x^2+x-1=0$ vô nghiệm, $6x^2-5x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-x^2+x-1$		$-$	0	$-$	|	$-$	
$6x^2-5x+1$		$+$	|	$-$	0	$+$	
$(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$ dương khi và chỉ khi $x\in\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$

$(-x^2+x-1)(6x^2-5x+1)$ âm khi và chỉ khi $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

b) Ta có $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$, $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Suy ra $\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(2;4)$, $\dfrac{x^2-x-2}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(4;+\infty)$.

c) Ta có $x^3-5x+2=(x-2)(x^2+2x-1)$

Ta có $x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$-$	0	$-$	|	$+$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	|	$+$	0	$+$	
x^3-5x+2		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra x^3-5x+2 dương khi và chỉ khi $x\in(-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})\cup(2;+\infty)$, x^3-5x+2 âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};2)$.

d) Ta có $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{-x^3+2x^2+5x-6}{-x^2+3x+4}=\dfrac{(x-1)(-x^2+x+6)}{-x^2+3x+4}$

Ta có $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$, $-x^2+3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x^2+3x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Suy ra $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ dương khi và chỉ khi $x\in(-2;-1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$, $x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$ âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;4)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.84: Xét dấu các tam thức sau

a) $f(x)=-2x^2+3x-1$

A. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(\frac{1}{2};1)$

B. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

C. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

D. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})$.

b) $g(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$

A. $g(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ **C.** $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $g(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

c) $h(x)=-2x^2+x-1$.

A. $g(x)>0 \quad \forall x\in R$. **B.** $g(x)\le 0 \quad \forall x\in R$.

C. $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in R$. **D.** $g(x)<0 \quad \forall x\in R$.

Lời giải

Bài 4.84: a) Tam thức $f(x)$ có $a=-2<0$, có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$

* $f(x)>0$ (trái dấu với a) $\Leftrightarrow x\in(\frac{1}{2};1)$

* $f(x)<0$ (cùng dấu với a) $\Leftrightarrow x\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $g(x)$ có $a=\frac{1}{4}>0$, có $\Delta=0$ $\Rightarrow g(x)>0$ (cùng dấu với a) $\forall x\ne\frac{1}{2}$ và $g(\frac{1}{2})=0$.

c) Tam thức $g(x)$ có $a=-2>0$, có $\Delta=-7<0$ $\Rightarrow g(x)<0$ (cùng dấu với a) $\forall x\in R$.

Bài 4.85: Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x)=(x^2-5x+4)(2-5x+2x^2)$

A.

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 $+\infty$
x^2-5x+4	+ | + 0 − | − 0 +
$2x^2-5x+2$	+ 0 − | + 0 + | +
$f(x)$	+ 0 + 0 + 0 − 0 +

B.

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 $+\infty$
x^2-5x+4	+ | + 0 − | + 0 +
$2x^2-5x+2$	+ 0 + | − 0 + | +
$f(x)$	+ 0 − 0 + 0 + 0 +

C.

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 $+\infty$
x^2-5x+4	+ | + 0 + | − 0 +
$2x^2-5x+2$	+ 0 − | + 0 + | +
$f(x)$	+ 0 − 0 + 0 − 0 +

D.

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 $+\infty$
x^2-5x+4	+ | + 0 − | − 0 +
$2x^2-5x+2$	+ 0 − | − 0 + | +
$f(x)$	+ 0 − 0 + 0 − 0 +

b) $f(x)=x^2-3x-2-\frac{8}{x^2-3x}$.

A.

x	$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$
x^2-3x	+ | + 0 + | − | − 0 + | +

x^2-3x-4	+ 0 − | + | − | − | − 0 +
x^2-3x+2	+ | + | + 0 − 0 + | + | +
f(x)	+ || − 0 + || − || + 0 − || +

B.

x	$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$
x^2-3x	+ | + 0 − | + | − 0 + | +
x^2-3x-4	+ 0 − | − | + | − | − 0 +
x^2-3x+2	+ | + | + 0 − 0 + | + | +
f(x)	+ || − 0 + || − || + 0 − || +

C.

x	$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$
x^2-3x	+ | + 0 − | − | + 0 + | +
x^2-3x-4	+ 0 − | − | − | + | − 0 +
x^2-3x+2	+ | + | + 0 − 0 + | + | +
f(x)	+ || − 0 + || − || + 0 − || +

D.

x	$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$
x^2-3x	+ | + 0 − | − | − 0 + | +
x^2-3x-4	+ 0 − | − | − | − | − 0 +
x^2-3x+2	+ | + | + 0 − 0 + | + | +
f(x)	+ || − 0 + || − || + 0 − || +

Lời giải

Bài 4.85: a) Ta có: $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1; x=4$

$$2-5x+2x^2=0 \Leftrightarrow x=2; x=\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 $+\infty$

<table>
<tr><td>x^2-5x+4</td><td>+ | + 0 – | – 0 +</td></tr>
<tr><td>$2x^2-5x+2$</td><td>+ 0 – | – 0 + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ 0 – 0 + 0 – 0 +</td></tr>
</table>

b) Ta có: $f(x)=\dfrac{(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8}{x^2-3x}=\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)}{x^2-3x}$

Bảng xét dấu

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ -1 0 1 2 3 4 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>x^2-3x</td><td>+ | + 0 – | – | – 0 + | +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x-4</td><td>+ 0 – | – | – | – | – 0 +</td></tr>
<tr><td>x^2-3x+2</td><td>+ | + | + 0 – 0 + | + | +</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>+ || – 0 + || – || + 0 – || +</td></tr>
</table>

Bài 4.86: Xét dấu các biểu thức sau

a) $\dfrac{1}{x+9}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$

A. $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

B. $f(x)<0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

C. $f(x)\le 0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

D. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

b) x^4-4x+1.

A. $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

B. $f(x)>0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

C. $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

D. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

c) $\dfrac{3x+7}{x^2-x-2}+5$

A. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$

B. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)$

C. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

D. $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

d) x^3-3x+2

A. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)$

B. $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

C. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

D. $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)\setminus\{1\}$

Lời giải

Bài 4.86: a) Ta có: $f(x)=\frac{2x-2(x+9)-x(x+9)}{2x(x+9)}=\frac{-x^2-9x-18}{2x(x+2)}$

$\Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow (-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

b) Ta có: $f(x)=x^4+2x^2+1-2(x^2+2x+1)=(x^2+1)^2-\left[\sqrt{2}(x+1)\right]^2$

$\Rightarrow f(x)=\left(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

c) $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{3}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$

Và $\frac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

d) $f(x)=(x-1)^2(x+2)\Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)\setminus\{1\}$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

Bài 4.87: Tùy theo giá trị của tham số m $g(x)=(m-1)x^2+2(m-1)+m-3$, Khẳng định nào sau đây đúng là sai?

A. $m=1\Rightarrow g(x)<0\ \ \forall x\in R$

B. $T=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

C. $m<1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases}\Rightarrow g(x)<0\ \ \forall x\in R$.

D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

Bài 4.87: Nếu $m=1\Rightarrow g(x)=-2<0\ \ \forall x\in R$

Nếu $m\neq 1$, khi đó $g(x)$ là tam thức bậc hai có $a=m-1$ và $\Delta'=2(m-1)$, do đó ta có các trường hợp sau:

* $T=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\frac{m-1-\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$ và $x_2=\frac{m-1+\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$.

$\Rightarrow g(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $g(x)<0\Leftrightarrow x\in(x_1;x_2)$.

* $m<1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases}\Rightarrow g(x)<0\ \ \forall x\in R$

➢ **DẠNG TOÁN 2: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN TAM THỨC BẬC HAI LUÔN MANG MỘT DẤU.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $mx^2-\left(3m+2\right)x+1=0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $\left(m^2+5\right)x^2-\left(\sqrt{3}m-2\right)x+1=0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m=0$ phương trình trở thành $-2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ suy ra phương trình có nghiệm

Với $m\neq 0$, ta có $\Delta=\left(3m+2\right)^2-4m=9m^2+8m+4$

Vì tam thức $9m^2+8m+4$ có $a_m=9>0,\ \Delta'_m=-20<0$ nên $9m^2+8m+4>0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta=\left(\sqrt{3}m-2\right)^2-4\left(m^2+5\right)=-m^2-4\sqrt{3}m-16$

Vì tam thức $-m^2-4\sqrt{3}m-8$ có $a_m=-1<0,\ \Delta'_m=-4<0$ nên $-m^2-4\sqrt{3}m-8<0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f\left(x\right)=mx^2-x-1$

A. $-\frac{1}{4}<m<0$ **B.** $-\frac{1}{4}<m$ **C.** $m<0$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-\frac{1}{4}\end{array}\right.$

b) $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$

A. $m<4$ **B.** $m\le 4$ **C.** $m>4$ **D.** $m\le 2$

Lời giải

a) Với $m=0$ thì $f(x)=-x-1$ lấy cả giá trị dương(chẳng hạn $f(-2)=1$) nên $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\ne 0$ thì $f(x)=mx^2-x-1$ là tam thức bậc hai do đó

$$f(x)<0,\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=m<0 \\ \Delta=1+4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m>-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<m<0$$

Vậy với $-\frac{1}{4}<m<0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m=4$ thì $g(x)=-1<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\ne 4$ thì $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$ là tam thức bậc hai do đó

$$g(x)<0,\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=m-4<0 \\ \Delta'=(m-4)^2-(m-4)(m-5)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<4$$

Vậy với $m\le 4$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $h(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$

A. $m<-\frac{5}{8}$ **B.** $m\le -\frac{5}{8}$ **C.** $m>-\frac{5}{8}$ **D.** $m<-\frac{3}{8}$

b) $k(x)=\sqrt{x^2-x+m}-1$

A. $m>\frac{1}{4}$ **B.** $m\ge \frac{1}{4}$ **C.** $m\le \frac{1}{4}$ **D.** $m>\frac{3}{4}$

Lời giải

a) Tam thức $-4x^2+5x-2$ có $a=-4<0,\ \Delta=-7<0$ suy ra $-4x^2+5x-2<0\ \forall x$

Do đó $h(x)$ luôn dương khi và chỉ khi $h'(x)=-x^2+4(m+1)x+1-4m^2$ luôn âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=4(m+1)^2+(1-4m^2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m+5<0 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{8}$$

Vậy với $m<-\frac{5}{8}$ thì biểu thức $h(x)$ luôn dương.

b) Biểu thức $k(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}-1>0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}>1,\ \forall x \Leftrightarrow x^2-x+m>0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$

Vậy với $m > \dfrac{1}{4}$ thì biểu thức $k(x)$ luôn dương.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

a) $y = \dfrac{mx}{(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2$

Ta có $a = 2m^2 + 1 > 0,\ \Delta' = 4m^2 - 2(2m^2+1) = -2 < 0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

b) ĐKXĐ: $\dfrac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1$ và

Ta có $a_f = 2 > 0,\ \Delta_f' = (m+1)^2 - 2(m^2+1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \leq 0$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Xét tam thức bậc hai $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2$

Với $m = 0$ ta có $g(x) = 2 > 0$, xét với $m \neq 0$ ta có

$a_g = m^2 > 0,\ \Delta_g' = m^2 - m^2(m^2+2) = -m^2(m^2+1) < 0$

Suy ra với mọi m ta có $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\dfrac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$ đúng với mọi giá trị của x

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.88: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $x^2 - 2(m+2)x - (m+3) = 0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $(m^2+1)x^2 + (\sqrt{3}m - 2)x + 2 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

Bài 4.88: a) Ta có $\Delta = (m+2)^2 + m + 3 = m^2 + 5m + 7$

Vì tam thức $m^2 + 5m + 7$ có $a_m = 1 > 0,\ \Delta'_m = -2 < 0$ nên $x = -4,\ x = 0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta=\left(\sqrt{3}m-2\right)^2-8\left(m^2+1\right)=-5m^2-4\sqrt{3}m-4$

Vì tam thức $-5m^2-4\sqrt{3}m-4$ có $a_m=-5<0, \Delta'_m<0$ nên $-5m^2-4\sqrt{3}m-4<0$ với mọi m. Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Bài 4.89: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x)=-x^2-2x-m$

A. $-\frac{1}{4}<m$ **B.** $m<0$ **C.** $-\frac{1}{4}<m<0$ **D.** $\mathbb{R}$

b) $g(x)=4mx^2-4(m-1)x+m-3$

A. $m<1$ **B.** $m>-1$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m<-1$

Lời giải

Bài 4.89: a) $f(x)<0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=1-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$

Vậy với $-\frac{1}{4}<m<0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\ne 0$ thì $g(x)=4mx^2-4(m-1)x+m-3$ là tam thức bậc hai dó đó

$$g(x)<0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=4m<0 \\ \Delta'=4(m-1)^2-4m(m-3)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 4m+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1$$

Vậy với $m<-1$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Bài 4.90: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

a) $y=\sqrt{m^2x^2-4mx+m^2-2m+5}$

b) $y=\dfrac{2x+3m}{\sqrt{x^2+2(1-m)x+2m^2+3}}$

Lời giải

Bài 4.90: a) ĐKXĐ: $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0$ (*)

Với $m=0$ thì điều kiện (*) đúng với mọi x

Với $m\ne 0$ xét tam thức bậc hai $f(x)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5$

Ta có $a=m^2>0, \Delta'=4m^2-8\left(2m^2+1\right)=-12m^2-8<0$

Suy ra $f(x)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

b) ĐKXĐ: $x^2+2(1-m)x+2m^2+3>0$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2+2(1-m)x+2m^2+3$

Ta có $a=1>0, \Delta'=(1-m)^2-\left(2m^2+3\right)=-m^2-2m-2<0$

(Vì tam thức bậc hai $f(m)=-m^2-2m-2$ có $a_m=-1<0,\ \Delta'_m=-1<0$)

Suy ra với mọi m ta có $x^2+2(1-m)x+2m^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$

Bài 4.91: Tìm m để

a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\quad \forall x\in R$

A. $m<1$ **B.** $m>-1$ **C.** $m\le -1$ **D.** Vô nghiệm

b) Hàm số $y=\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3}$ có nghĩa với mọi x.

A. $m<1$ **B.** $m\ge 1$ **C.** $m\le -1$ **D.** $m<-1$

c) $\left|\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\quad \forall x\in R$

A. $0\le m$ **B.** $m\le 1$ **C.** $0\le m\le 1$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$

Lời giải

Bài 4.91: a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\quad \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2+3(2m^2-3m+2)\le 0\quad 7m^2-7m+7\le 0$ bpt vô nghiệm

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Hàm số có nghĩa với mọi x

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad (1)$

* $m=-1$ không thỏa mãn

* $m\ne -1\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ \Delta'=(m-1)(-2m-4)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 1$

c) Ta có $x^2+x+1>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le \dfrac{x+m}{x^2+x+1}\le 1\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1-m\ge 0 & (1) \\ x^2+2x+m+1\ge 0 & (2) \end{cases}$

(1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 1$

(2) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$

Vậy $0\le m\le 1$ là những giá trị cần tìm

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

2. Ứng dụng

Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng

➢ **DẠNG TOÁN 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2+2x+1<0$

A. $S=(-\infty;-\frac{1}{3})$ **B.** $S=(1;+\infty)$

C. $S=\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $S=(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$

b) $x^2+x-12<0$

A. $S=(-4;3)$ **B.** $S=(-\infty;-4)$ **C.** $S=(3;+\infty)$ **D.** $S=\mathbb{R}$

c) $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0$

A. $S=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **B.** $S=\mathbb{R}\backslash\left\{\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **C.** $S=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$ **D.** $S=\mathbb{R}$

d) $-36x^2+12x-1\geq 0$

A. $S=\left\{\pm\frac{1}{6}\right\}$ **B.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$ **C.** $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$ **D.** $S=\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$

Lời giải

a) Tam thức $f(x)=-3x^2+2x+1$ có $a=-3<0$ và có hai nghiệm $x_1=-\frac{1}{3};\ x_2=1$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{3}$ hoặc $x>1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình : $S=(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $f(x)=x^2+x-12$ có $a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=-4;\ x_2=3$

($f(x)$ trái dấu với hệ số a).

Suy ra $x^2+x-12<0 \Leftrightarrow -4<x<3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;3)$

c) Tam thức $f(x)=5x^2-6\sqrt{5}x+9$ có $a=5>0$ và $\Delta=0$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0 \Leftrightarrow x\neq\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) Tam thức $f(x)=-36x^2+12x-1$ có $a=-36<0$ và $\Delta=0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x\neq\frac{1}{6}$ và $f\left(\frac{1}{6}\right)=0$

Suy ra $-36x^2+12x-1\geq 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $x^2-mx+m+3=0$

A. $m\in(-\infty;-2]$ **B.** $m\in[6;+\infty)$

C. $m\in[-2;6]$ **D.** $m\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$

b) $(1+m)x^2-2mx+2m=0$

A. $m\leq 0$ **B.** $-2\leq m$ **C.** $-2\leq m\leq 0$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.$

Lời giải

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2-4(m+3)\geq 0 \Leftrightarrow m^2-4m-12\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq 6\\m\leq -2\end{array}\right.$

Vậy với $m\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)$ thì phương trình có nghiệm

b) Với $m=-1$ phương trình trở thành $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ suy ra $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2-2m(1+m)\geq 0 \Leftrightarrow m^2+2m\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 0$

Vậy với $-2\leq m\leq 0$ thì phương trình có nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình $3x^2-2(m+5)x-m^2+2m+8\leq 0$ (1)

A. $m\in(-\infty;-3]\cup[7;+\infty)$ **B.** $m>-\frac{1}{2}$

C. $m\geq 7$ **D.** $m\leq -3$

Lời giải

Ta có $3x^2-2(m+5)x-m^2+2m+8=0 \Leftrightarrow x=m+2$ hoặc $x=\frac{4-m}{3}$

* Với $m+2>\frac{4-m}{3} \Leftrightarrow 3m+6>4-m \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{4-m}{3}\le x\le m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\frac{4-m}{3};m+2\right]$

Suy ra mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1;1]\subset\left[\frac{4-m}{3};m+2\right] \Leftrightarrow \begin{cases}-1\ge\frac{4-m}{3}\\ 1\le m+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m\ge 7\\ m\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 7$

Kết hợp với điều kiện $m>-\frac{1}{2}$ ta có $m\ge 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2<\frac{4-m}{3} \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow m+2\le x\le \frac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2;\frac{4-m}{3}\right]$

Suy ra mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1;1]\subset\left[m+2;\frac{4-m}{3}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}-1\ge m+2\\ 1\le\frac{4-m}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m\le -3\\ m\le 1\end{cases} \Leftrightarrow m\le -3$

Kết hợp với điều kiện $m<-\frac{1}{2}$ ta có $m\le -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m=-\frac{1}{2}$ ta có bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ nên $m=-\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m\in(-\infty;-3]\cup[7;+\infty)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho $(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2<0$ khẳng định nào sau đây sai?

A. $m=-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-1)$

B. $-\frac{1}{4}\le m\le\frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=\varnothing$

C. $\left[\begin{array}{l}m>\frac{1}{2}\\ -1<m<-\frac{1}{4}\end{array}\right.$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(x_1;x_2)$

D. $m>-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

Lời giải

Với $m=-1$: bất phương trình trở thành $6x+6<0\Leftrightarrow x<-1$

Với $m\neq-1$ ta có $g(x)=(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2$ là tam thức bậc hai có : $a=m+1;\ \Delta'=8m^2-2m-1$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$m+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$8m^2-2m-1$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* $-\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq0\end{cases}\Rightarrow g(x)\geq0\ \ \forall x\in R\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

* $\left[\begin{array}{l}m>\frac{1}{2}\\ -1<m<-\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'>0\end{cases}\Rightarrow\ S=(x_1;x_2)$, với

$$x_1=\frac{2m-1-\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1};x_2=\frac{2m-1+\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}.$$

* $m<-1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'>0\end{cases}\Rightarrow\ S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

Kết luận

$m=-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-1)$

$-\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=\varnothing$

$\left[\begin{array}{l}m>\frac{1}{2}\\ -1<m<-\frac{1}{4}\end{array}\right.$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(x_1;x_2)$

$m<-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.92: Giải các bất phương trình sau:

a) $-2x^2+3x-1\geq0$

A. $T=\left(\frac{1}{2};1\right)$ **B.** $T=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $T=\left[\frac{1}{2};1\right]$ **D.** $T=\left(1;+\infty\right)$

b) $\frac{1}{4}x^2-x+1\leq0$

A. $T=\{3\}$ **B.** $T=\{4\}$ **C.** $T=(2;3)$ **D.** $T=\{2\}$

c) $-2x^2+x-1\le 0$.

A. $T=\mathbb{R}$ **B.** $T=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **C.** $T=(-1;+\infty)$ **D.** $T=\mathbb{R}\setminus(3;7)$

d) $7x>2x^2-6$

A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$ **B.** $\left[\frac{3}{2};2\right]$ **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ **D.** $(2;+\infty)$

e) $x^2-22x+51<0$

A. $T=\varnothing$ **B.** $T=\mathbb{R}$ **C.** $T=\left(9;\frac{170}{3}\right)$ **D.** $T=(-\infty;2)$

f) $x^2+5x+6\ge 0$

A. $T=(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$ **B.** $T=(-\infty;-3]$

C. $T=[-3;-2]$ **D.** $T=[-2;+\infty)$

Lời giải

Bài 4.92: a) $T=\left[\frac{1}{2};1\right]$ b) $T=\{2\}$ c) $T=\mathbb{R}$

d) $\left(\frac{3}{2};2\right)$ e) $T=\varnothing$ f) $T=(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$

Bài 4.93: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2-2mx+m+3=0$

A. $m\in\left(\frac{1-2\sqrt{13}}{2};\frac{1+2\sqrt{13}}{2}\right)$ **B.** $m\in\left(\frac{1-3\sqrt{13}}{2};\frac{1+3\sqrt{13}}{2}\right)$

C. $m\in\left(\frac{1-4\sqrt{13}}{2};\frac{1+4\sqrt{13}}{2}\right)$ **D.** $m\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

b) $(m-1)x^2-(2m-2)x+2m=0$

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m<-2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\ m<-3\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m<-1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 4\\ m<-4\end{array}\right.$

Lời giải

Bài 4.93: a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'<0$

$\Leftrightarrow m^2-m-3<0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

Vậy với $m\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ thì phương trình vô nghiệm

b) Với $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\ne 1$ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'<0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2m(m-1) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(-m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm

Bài 4.94: Cho $mx^2 - 2mx + m - 1 > 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \varnothing$

B. $m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$

C. Cả A, B đều đúng

D.Cả A, B đều sai

Lời giải

Bài 4.94:Với $m = 0$, bất phương trình trở thành: $-1 > 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \neq 0 \Rightarrow f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ là tam thức bậc hai có $a = m,\ \Delta' = m$

* $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình có tập nghiệm: $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$.

* $m < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm .

Kết luận

$m \leq 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \varnothing$

$m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$

Bài 4.95: Tìm m để mọi $x \in [0; +\infty)$ đều là nghiệm của bất phương trình $(m^2 - 1)x^2 - 8mx + 9 - m^2 \geq 0$

A. $m \in (-3; -1)$ **B.** $m \in \{-3; -1\}$ **C.** $m \in [-3; -1]$ **D.** $m \in \varnothing$

Lời giải

Bài 4.95: $m = 1$ không thỏa mãn ycbt; $m = -1$ thỏa mãn ycbt

Với $m \neq \pm 1$ ta có bpt $\Leftrightarrow [(m+1)x + m - 3][(m-1)x - m - 3] \geq 0$

Đáp số $m \in [-3; -1]$

Bài 4.96: Cho hàm số $f(x) = x^2 + bx + 1$ với $b \in \left(3, \frac{7}{2}\right)$. Giải bất phương trình $f(f(x)) > x$.

A. $S = \left(-\infty; \frac{1-b-2\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-b+2\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$

B. $S=\left(-\infty;\frac{1-2b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-2b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

C. $S=\left(-\infty;\frac{1-3b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-3b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

D. $S=\left(-\infty;\frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

Lời giải

Bài 4.96: Ta có $f\left(f\left(x\right)\right)-x=\left[x^2+(b+1)x+b+2\right]\left[x^2+(b-1)x+1\right]$

Suy ra $f\left(f\left(x\right)\right)-x>0\Leftrightarrow\left[x^2+(b+1)x+b+2\right]\left[x^2+(b-1)x+1\right]>0$

Đặt $g\left(x\right)=x^2+\left(b-1\right)x+1,\ h\left(x\right)=x^2+\left(b+1\right)x+b+2$

Ta có $\Delta_{g(x)}=b^2-2b-3$, $\Delta_{h(x)}=b^2-2b-7$

Vì $b\in\left(3,\frac{7}{2}\right)$ nên $\Delta_{g(x)}>0$ và $\Delta_{h(x)}<0$. Phương trình $g\left(x\right)=0$ có hai nghiệm

$x_1=\frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$, $x_2=\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;\frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2};+\infty\right)$

➢ **DẠNG TOÁN 2: GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x^2+9x+7>0\\x^2+x-6<0\end{cases}$

A. $S=\left[-1;2\right]$ **B.** $S=\left(-1;2\right)$ **C.** $S=\left(-\infty;-1\right)$ **D.** $S=\mathbb{R}$

b) $\begin{cases}2x^2+x-6>0\\3x^2-10x+3\geq 0\end{cases}$

A. $S=(-\infty;-2]$ **B.** $S=(3;+\infty)$

C. $S=\left(-2;3\right)$ **D.** $S=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$

c) $\begin{cases}-x^2+5x-4\geq 0\\x^2+x-13\leq 0\end{cases}$

A. $S=\left(1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right)$ **B.** $S=(-\infty;1)$

C. $S=\left(\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$ **D.** $S=\left[1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right]$

d) $\begin{cases}x^2+4x+3\ge 0\\2x^2-x-10\le 0\\2x^2-5x+3>0\end{cases}$

A. $S=\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ **B.** $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$ **C.** $S=(-\infty;1)$ **D.** $S=\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases}2x^2+9x+7>0\\x^2+x-6<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\x\le -\dfrac{7}{2}\end{array}\right.\\-3<x<2\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<2$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=(-1;2)$.

b) Ta có $\begin{cases}2x^2+x-6\ge 0\\3x^2-10x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3}{2}\\x\le -2\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>3\\x<\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x\le -2\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

c) Ta có $\begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\x^2+x-13\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 4\\\dfrac{-1-\sqrt{53}}{2}\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\dfrac{-1+\sqrt{53}}{2}\right]$.

d) Ta có $\begin{cases} x^2+4x+3\ge 0 \\ 2x^2-x-10\le 0 \\ 2x^2-5x+3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge -1 \\ x\le -3 \end{array}\right. \\ -2\le x\le \dfrac{5}{2} \\ 1\le x\le \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{3}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx^2-x-5\le 0 \\ (1-m)x^2+2mx+m+2\ge 0 \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m=1$

A. $S=\left[\dfrac{1-2\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+2\sqrt{21}}{2}\right]$ **B.** $S=\left[\dfrac{1-3\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+3\sqrt{21}}{2}\right]$

C. $S=\left[\dfrac{1-4\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+4\sqrt{21}}{2}\right]$ **D.** $S=\left[\dfrac{1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

b) Tìm *m* để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi *x*

A. $\dfrac{-1-2\sqrt{17}}{4}\le m\le -\dfrac{31}{20}$ **B.** $m\le -\dfrac{1}{20}$

C. $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m$ **D.** $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\le m\le -\dfrac{1}{20}$

Lời giải

a) Khi $m=1$ hệ bất phương trình trở thành

$\begin{cases} x^2-x-5\le 0 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x\ge -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[\dfrac{1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

b) Khi $m=0$ hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} -x-5\le 0 \\ x^2+2\ge 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) do đó $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $m=1$ theo câu a ta thấy cũng không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ ta có hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi *x* khi và chỉ khi các bất phương trình trong hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 0 \\ \Delta_1 = 1 + 20m \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \Delta'_2 = m^2 - (1-m)(m+2) \le 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \le -\dfrac{1}{20} \\ m < 1 \\ 2m^2 + m - 2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \le -\dfrac{1}{20} \\ m < 1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \le m \le \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \le m \le -\frac{1}{20}$$

Vậy $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} \le m \le -\dfrac{1}{20}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \le 0 \\ mx^2 - 2(2m+1)x + 5m + 3 \ge 0 \end{cases}$.

A. $m > -\dfrac{1}{2}$ **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$ **C.** $m \ge -\dfrac{1}{2}$ **D.** $m = \varnothing$

Lời giải

Ta có bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với bất phương trình:

$mx^2 - 2(2m+1)x + 5m + 3 \le 0$ (1) có nghiệm $x \in S = [1;2]$.

Ta đi giải bài toán phủ định là: tìm m để bất phương trình (1) vô nghiệm trên S

Tức là bất phương trình $f(x) = mx^2 - 2(2m+1)x + 5m + 3 < 0$ (2) đúng với mọi $x \in S$.

- $m = 0$ ta có (2) $\Leftrightarrow -2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$ nên (2) không đúng với $\forall x \in S$
- $m \neq 0$ tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m$, biệt thức $\Delta' = -m^2 + m + 1$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
m		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-m^2+m+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

+) $m \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$ nên $f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $m \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn

+) $m \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$ nên $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$, suy ra $m \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

+) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}$ $(x_1 < x_2)$

Do đó: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1 \\ x > x_2 \end{array}\right.$, suy ra (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 > 2 \\ x_2 < 1 \end{array}\right.$ (*)

Ta có $x_1 = 2 + \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{m} < 2$

$$x_2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \Delta' < m^2+2m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ 2m^2+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}.$$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < -\frac{1}{2}$

+) $0 < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $a < 0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m}$, $x_2 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}$ $(x_1 > x_2)$

Suy ra $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_2; x_1)$

Do đó (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + m + 1 < 0 \\ \sqrt{\Delta'} + 1 > 0 \end{cases}$ (**)

Vì $m > 0$ nên (**) vô nghiệm.

Từ đó, ta thấy (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Vậy $m \ge -\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

3. Bài tập luyện tập

Bài 4.97: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} -x^2+4x-7<0 \\ x^2-2x-1\ge 0 \end{cases}$

A. $T=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]$ **B.** $T=\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$

C. $T=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$ **D.** $T=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$

b) $\begin{cases} x^2+x+5<0 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}$

A. $S=\mathbb{R}$ **B.** $S=\varnothing$ **C.** $S=\left(\frac{1}{2};4\right)$ **D.** $S=\{1;2\}$

c) $-4\le\frac{x^2-2x-7}{x^2+1}\le 1$

A. $T=[1;+\infty)$ **B.** $T=\left[-4;-\frac{3}{5}\right]$

C. $T=\left[-4;-\frac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty)$ **D.** $T=\varnothing$

d) $\frac{1}{13}\le\frac{x^2-2x-2}{x^2-5x+7}\le 1$

A. $T=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{11}{4};3\right]$ **B.** $T=\mathbb{R}$

C. $T=\left[\frac{11}{4};3\right]$ **D.** $T=(-\infty;-1]$

Lời giải

Bài 4.97: a) $T=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$ b) Vô nghiệm

c) $-4\le\frac{x^2-2x-7}{x^2+1}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases} -4\left(x^2+1\right)\le x^2-2x-7 \\ x^2-2x-7\le x^2+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5x^2-2x-3\ge 0 \\ 2x\ge -8 \end{cases}$

Suy ra tập $T=\left[-4;-\frac{3}{5}\right]\cup[1;+\infty)$

d) $T=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{11}{4};3\right]$

Bài 4.98: Tìm m để bất phương trình $m^2x+m(x+1)-2(x-1)>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;1]$

A. $0 < m < \frac{3}{2}$ **B.** $0 < m$ **C.** $m < \frac{3}{2}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Lời giải

Bài 4.98: Đặt $f(x) = (m^2 + m - 2)x + m + 2$

Bài toán thỏa mãn: $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + m - 2)(-2) + m + 2 > 0 \\ (m^2 + m - 2)(1) + m + 2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$$

Bài 4.99: Cho $\begin{cases} x^2 - (1 + 2m)x + 2m \le 0 \\ x^2 + (2 + m)x + 2m \le 0 \end{cases}$ khẳng định nào sai?

A. $m \le -1 : S = [-2;1]$,

B. $-1 < m < 0 : S = [2a; -a]$

C. $m = 0 : S = \{0\}$

D. $m > 0 : S = \{1\}$

Lời giải

Bài 4.99: $m \le -1 : S = [-2;1]$, $-1 < m < 0 : S = [2a; -a]$, $m = 0 : S = \{0\}$, $m > 0 : S = \varnothing$

Bài 4.100: Tìm m để bất phương trình $2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 2m + 2 \le 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $2 \le m \le \frac{21 + 2\sqrt{34}}{10}$ **B.** $m \le \frac{21 + 2\sqrt{34}}{10}$

C. $2 \le m$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > \frac{21 + 2\sqrt{34}}{10} \end{array}\right.$

Lời giải

Bài 4.100: Đặt $f(x) = 2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 2m + 2$, có $\Delta = -4m^2 + 20m - 15$

- $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \frac{5 - \sqrt{10}}{2} \\ m \ge \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$, suy ra $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2};\frac{5+\sqrt{10}}{2}\right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm

$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{4}$ $(x_1 < x_2)$

Và $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_1;x_2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le \frac{1}{2} \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \le 2\sqrt{\Delta} \\ 7-2m \le \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \le 4\Delta \\ (7-2m)^2 \le \Delta \\ \frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \le 0 \\ m^2 - 6m + 8 \le 0 \\ \frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le m \le \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$$

Vậy $2 \le m \le \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.101: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0(1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1$.

A. $m \in [2;+\infty)$ **B.** $m \in [3;+\infty)$ **C.** $m \in [4;+\infty)$ **D.** $m \in [1;+\infty)$

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \le 1$.

A. $m \in (1;2)$ **B.** $m \in (-\infty;1)$ **C.** $m \in (2;+\infty)$ **D.** $m \in [1;2]$

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

A. $1 < m$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 < m < 2$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

d) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

A. $1 < m$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 < m < 2$ **D.**không tồn tại m

Lời giải

Bài 4.101: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào pt (1) ta được phương trình: $t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0\,(2)$

a) Để phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \ge 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le 0 \le t_2 \Leftrightarrow P \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm : $0 \le t_1 \le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ m^2 - 3m + 2 \ge 0 \\ m - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$

Kết luận: với $m \in [1; +\infty)$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \ge 1$.

b) Để phương trình (1) có nghiệm $x \le 1$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \le 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le 0 \le t_2 \Leftrightarrow P \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm $t_1 \le t_2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ m^2 - 3m + 2 \ge 0 \\ m - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Kết luận: với $m \in [1; 2]$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \le 1$.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Kết luận: với $1 < m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 > 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ m - 1 < 0 \end{cases}$$

Kết luận: không tồn tại m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

- **DẠNG TOÁN 3: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC.**

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình :

a) $(1-2x)(x^2 - x - 1) > 0$

A. $S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ **B.** $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

C. $S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ **D.** $S = \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \le 0$

A. $S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

B. $S=\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

C. $S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

D. $S=\varnothing$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		–	|	–	0	+	|	+	
x^2-x-1		+	0	–	|	–	0	+	
VT		–	0	+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$S=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

b) Bất phương trình $(x^4-4x^2+4)-(x^2-2x+1)\le 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)^2-(x-1)^2\le 0 \;\Leftrightarrow (x^2+x-3)(x^2-x-1)\le 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-3		+	0	–	|	–	0	+	|	+	
x^2-x-1		+	|	+	0	–	|	–	0	+	
VT		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=\left[\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{x^2-1}{\left(x^2-3\right)\left(-3x^2+2x+8\right)}>0$

A. $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$

B. $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

C. $S=(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

D. $S=\left(-\sqrt{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

b) $x^2+10\le\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}$

A. $S=(2\sqrt{2};3]$

B. $S=[-3;-2\sqrt{2})$

C. $S=[-3;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3]$

D. $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{8}\right\}$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\frac{4}{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x^2-1		+	|	+	|	+	0	−	0	+	|	+	|	+	
x^2-3		+	0	−	|	−	|	−	|	−	0	+	|	+	
$-3x^2+2x+8$		−	|	−	0	+	0	+	|	+	|	+	0	−	
VT		−	||	+	||	−	0	+	0	−	||	+	||	−	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=\left(-\sqrt{3};-\frac{4}{3}\right)\cup(-1;1)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$$

b) Ta có $x^2+10\le\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+1}{x^2-8}-\left(x^2+10\right)\ge0$

$\Leftrightarrow\dfrac{2x^2+1-\left(x^2-8\right)\left(x^2+10\right)}{x^2-8}\ge0\Leftrightarrow\dfrac{81-x^4}{x^2-8}\ge0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left(9-x^2\right)\left(9+x^2\right)}{x^2-8}\ge0\Leftrightarrow\dfrac{9-x^2}{x^2-8}\ge0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$9-x^2$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
x^2-8		+	|	+	0	−	|	+	|	+	

VT	– 0 + || – || + 0 –

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$S=[-3;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};3]$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình sau

a) $\dfrac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0$

A. $S=(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

B. $S=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

C. $S=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$

D. $S=(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$

A. $S=\left[-1;0\right]$ **B.** $S=[1;\sqrt{3})$

C. $S=\left[-1;0\right]\cup[1;\sqrt{3})$ **D.** $S=\varnothing$

Lời giải

a) Vì $\left|x^2-x\right|+2>0$ nên

$$\frac{\left|x^2-x\right|-2}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(\left|x^2-x\right|-2\right)\left(\left|x^2-x\right|+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)}{x^2-x-1}\ge 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	–	|	–	|	–	0	+	
x^2-x+2		+	|	+	|	+	|	+	|	+	
x^2-x-1		+	|	+	||	–	||	+	0	+	
$\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x+2\right)}{x^2-x-1}$		+	0	–	||	+	||	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=(-\infty;-1]\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+\sqrt{3}x-6\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne \sqrt{3} \\ x\ne -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}>0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad -2\sqrt{3}$ $\quad 0$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad +\infty$
x^2-x	+ 0 + 0 – 0 + | +
$x^2+\sqrt{3}x-6$	+ 0 – | – | – 0 +
$\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}$	+ || – 0 + 0 – || +

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=\left[-1;0\right]\cup[1;\sqrt{3})$$

Nhận xét: Ở câu b chúng ta phải đặt điều kiện thì khi đó các phép biến đổi trên mới đảm bảo là phép biến đổi tương đươc.

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{x-m^2-m}\left(3-\frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3}\right)<0$ (*) có nghiệm .

A. $-2<m$ **B.** $m<1$ **C.** $-2<m<1$ **D.** $\left[\begin{matrix} m<-2 \\ m>1 \end{matrix}\right.$

Lời giải

Ta có $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\frac{x+1}{x^3-x^2-3x+3}>0 \\ x>m^2+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}<0 \\ x>m^2+m \end{cases}$ (**)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $\quad \frac{-3-\sqrt{57}}{6}$ $\quad -\sqrt{3}$ $\quad \frac{-3+\sqrt{57}}{6}$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad 2$ $\quad +\infty$					
$x-1$	–	–	–	– 0 +	+	+

$x-2$	–	–	–	–	–	– 0 +	
$3x^2+3x-4$	+ 0 –		– 0 +		+	+	+
x^2-3	+	+ 0 –		–	– 0 +		+
$\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}$	+ 0 – || + 0 – || + || – 0 +						

Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-2)(3x^2+3x-4)}{(x-1)(x^2-3)}<0$ là

$S=\left(\frac{-3-\sqrt{57}}{6};-\sqrt{3}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{57}}{6};1\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$

Do đó bất phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi hệ bất phương trình (**) có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2+m<2\Leftrightarrow m^2+m-2<0\Leftrightarrow -2<m<1$

Vậy $-2<m<1$ là giá trị cần tìm.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.102: Giải các bất phương trình sau

a) $(4-3x)(-2x^2+3x-1)\le 0$

A. $T=(-\infty;\frac{1}{2}]$ **B.** $T=\left[1;\frac{4}{3}\right]$

C. $T=(-\infty;\frac{1}{2}]\cup\left[1;\frac{4}{3}\right]$ **D.** $T=\left(\frac{1}{2};1\right)$

b) $x^2+x-\frac{3}{x^2+x-2}\le 0$

A. $T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)$ **B.** $T=\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

C. $T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$ **D.** $T=\left(-2;1\right)$

c) $x^4-x^2-2x-1>0$

A. $T=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ **B.** $T=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

C. $T=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ **D.** $T=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

d) $\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(-3x^2+2x+8\right)}{x^2-\sqrt{2}x}<0$

A. $T=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};0\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$

B. $T=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

C. $T=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

D. $T=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};0\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

e) $\dfrac{1-\left|x^2-2x\right|}{x^2+x-2}\ge 0$

A. $T=\left(-2;1-\sqrt{2}\right]$ **B.** $T=\left[1;1+\sqrt{2}\right]$

C. $T=\left(-2;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1;1+\sqrt{2}\right]$ **D.** $T=\left(1-\sqrt{2};1\right)$

f) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^3+1}}{x^2+x}\le 0$

A. $T=\left(-1;0\right)$ **B.** $T=\left[1;+\infty\right)$

C. $T=\left(-1;0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$ **D.** $T=\left(0;1\right)$

Lời giải

Bài 4.102: a) BXD :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$		+	|	+	|	+	0	−	
$-2x^2+3x-1$		−	0	+	0	−	|	−	
VT		−	0	+	0	−	0	+	

$T=(-\infty;\dfrac{1}{2}]\cup\left[1;\dfrac{4}{3}\right]$

b) Bpt $\Leftrightarrow \dfrac{(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3}{x^2+x-2}\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-3)}{x^2+x-2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2+x-2} \le 0$

$\Rightarrow T = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right) \cup \left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

c) $T = \left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

d) $T = (-\infty;-2) \cup \left(-\frac{4}{3};0\right) \cup \left(\sqrt{2};2\right) \cup (2;+\infty)$

e) $T = \left(-2;1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1;1+\sqrt{2}\right]$

f) $T = (-1;0) \cup [1;+\infty)$

➢ **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c<0$ hoặc $ax^2+bx+c\le 0$ rồi đi chứng minh(theo thứ tự) $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$, $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.
- Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2 \le 4BC$ (hoặc $A^2 \le BC$) ta có thể

chứng minh tam thức $f(x)=Bx^2+Ax+C$ (hoặc $f(x)=Bx^2+2Ax+C$)

luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta \le 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y. Chứng minh rằng $3x^2+5y^2-2x-2xy+1>0$

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2-2(y+1)x+5y^2+1>0$

Đặt $f(x)=3x^2-2(y+1)x+5y^2+1$ xem y là tham số khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x=3>0$

và

$\Delta_x' = (y+1)^2-3(5y^2+1) = -14y^2+2y-2$

Xét tam thức $g(y)=-14y^2+2y-2$ có hệ số $a_y=-14<0$ và $\Delta'_y=-27<0$

Suy ra $\Delta'_x<0$

Do đó $f(x)<0$ với mọi x, y.

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1,a_2,...,a_n)\ge 0$

$\forall a_1,a_2,...,a_n$ mà $f(a_1,a_2,...,a_n)=g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a>0$, ta có thể sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh. Khi đó $g(a_i)\ge 0 \Leftrightarrow \Delta_{a_i}\le 0$.

Ví dụ 2: Cho x,y,z là số thực. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz+y^2z^2-2yz+1\ge 0$.

Lời giải

Bất đẳng thức viết lại $\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\ge 0$

Đặt $f\left(x\right)=\left(1+y^2z^2\right)x^2-4xyz+y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1$, khi đó $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a=1+y^2z^2>0$ và $\Delta'_x=4y^2z^2-\left(1+y^2z^2\right)\left(y^2+z^2+y^2z^2-2yz+1\right)$

$\Rightarrow \Delta'_x=-(1+y^2-2yz+z^2-2y^2z^2+y^4z^2-2y^3z^3+y^2z^4+y^4z^4)$

Áp dụng BĐT $a^2+b^2\ge 2ab$ ta có

$y^4z^2+y^2z^4\ge 2y^3z^3$, $y^4z^4+1\ge 2y^2z^2$ và $y^2+z^2\ge 2yz$

Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x\le 0$

Do đó $f\left(x\right)\ge 0,\ \forall x,y,z$. ĐPCM.

Ví dụ 3: Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác và x,y,z thỏa mãn: $a^2x+b^2y+c^2z=0$ .Chứng minh rằng: $xy+yz+zx\le 0$.

Lời giải

* Nếu trong ba số x,y,z có một số bằng 0, chẳng hạn $x=0\Rightarrow b^2y=-c^2z$.

$\Rightarrow xy+yz+zx=yz=-\frac{c^2}{b^2}z^2\le 0$.

* $x,y,z\ne 0$ .Do $a^2x+b^2y+c^2z=0\Rightarrow x=-\frac{b^2y+c^2z}{a^2}$

$\Rightarrow xy+yz+zx\le 0 \Leftrightarrow -(y+z)\frac{b^2y+c^2z}{a^2}+yz\le 0$

$\Leftrightarrow f(y)=b^2y^2+(b^2+c^2-a^2)yz+c^2z^2\ge 0$.

Tam thức $f(y)$ có $\Delta_y=\left[(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\right]z^2$.

Vì $\begin{cases}|b-c|<a\\ b+c>a\end{cases}\Rightarrow -2bc<b^2+c^2-a^2<2bc$

$\Rightarrow (b^2+c^2-a^2)^2<4c^2b^2\Rightarrow \Delta_y\le 0,\ \forall z\Rightarrow f(y)\ge 0\quad \forall y,z$.

Ví dụ 4: (BĐT Bunhiacốpski) Cho 2n số $a_1,a_2,..,a_n,b_1,b_2,...,b_n$. Chứng minh rằng :

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2).$$

Lời giải

* Nếu $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=0\Rightarrow$ BĐT hiển nhiên đúng.

* Nếu $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2>0$. Xét tam thức :

$$f(x)=\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x$$

$$+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2$$

$$=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2\ge0\quad\forall x$$

$$\Rightarrow\Delta=(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2-$$

$$-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\le0$$

$$\Leftrightarrow(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.104: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x,z\in R$.

$$x^2+9y^2+5z^2+6xy-4xz-12yz-2z+1\ge0.$$

A. $-\dfrac{2}{3}\le y$ **B.** $y\le0$ **C.** $-\dfrac{2}{3}\le y\le0$ **D.** $\left[\begin{array}{l}y<-\dfrac{2}{3}\\y>0\end{array}\right.$

Lời giải

Bài 4.104: BĐT đã cho đúng với $\forall x,z\in R\Leftrightarrow$ tam thức $f(x)\ge0\ \ \forall x,z$

(Trong đó $f(x)=x^2+2(3y-2z)x+9y^2+5z^2-12yz-2z+1$)

$$\Leftrightarrow\Delta'_x=(3y-2z)^2-(9y^2+5z^2-12yz-2z+1)$$

$$=-z^2+2(3y+1)z-1\le0\ \forall z$$

$$\Leftrightarrow\Delta'_z=(3y+1)^2-1\le0\Leftrightarrow3y(3y+2)\le0\Leftrightarrow-\frac{2}{3}\le y\le0.$$

Vậy $-\dfrac{2}{3}\le y\le0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.105: Cho $x,y,z\ge0$ thỏa mãn: $xy+yz+zx+xyz=4$.

Chứng minh rằng : $x+y+z\ge xy+yz+zx$.

Lời giải

Bài 4.105: Ta giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow z\le 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x=\dfrac{4-yz}{y+z+yz}$

Nên $(1)\Leftrightarrow \dfrac{4-yz}{y+z+yz}+y+z\ge (y+z)\dfrac{4-yz}{y+z+yz}+yz$

$\Leftrightarrow f(y)=(1+z-z^2)y^2+(z^2+z-4)y+(z-2)^2\ge 0$.

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a=1+z-z^2>0$ (do $z\le 1$) và có biệt thức : $\Delta=z(z-1)^2(5z-8)\le 0\Rightarrow f(y)\ge 0$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$ hoặc $(x;y;z)=(2;2;0)$ và các hoán vị.

Bài 4.106: Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng:

$$xzy+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z)\quad (\textit{THTT}).$$

Lời giải

Bài 4.106: Trong ba số x,y,z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y. Khi đó ta có:

$(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge x+y-1\ \Rightarrow xyz\ge xz+yz-z$.

$\Rightarrow xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8$.

Nên ta chứng minh:

$xz+yz-z+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z)\Leftrightarrow f(z)=2z^2+(x+y-6)z+2(x^2+y^2)-5(x+y)+8\ge 0$.

Tam thức $f(z)$ có $a=2>0$ và $\Delta_z=-15x^2+2(y+14)x-15y^2+28y-28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x, có $a=-15<0$ và $\Delta_x=-224(y-1)^2\le 0\ \Rightarrow \Delta_z\le 0\Rightarrow f(z)\ge 0$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.107: Cho các số thực x,y thỏa mãn bất phương trình $5x^2+5y^2-5x-15y+8\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$.

A.2 **B.3** **C.4** **D.5**

Lời giải

Bài 4.107: Cho các số thực x,y thỏa mãn bất phương trình $5x^2+5y^2-5x-15y+8\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+3y$.

HD: Do $S=x+3y\Rightarrow x=S-3y$, thay vào giả thiết $5x^2+5y^2-5x-15y+8\le 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được

$50y^2-30Sy+5S^2-5S+8\le 0(*)$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta\ge 0$, tức là

$900S^2-4.50.(5S^2-5S+8)\ge 0$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2+1000S-1600\le 0$

hay $100S^2-1000S+1600\le 0\Leftrightarrow 2\le S\le 8$

Khi $S=2$ thay vào (*) được $50y^2-60y+18\le 0\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}$ nên $x=S-3y=2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}$

Khi $S=8$ thay vào (*) được $50y^2-240y+288\le 0\Leftrightarrow y=\frac{12}{5}\Rightarrow x=S-3y=8-\frac{36}{5}=\frac{4}{5}$

$\max S=8,\min S=2$

Bài 4.108: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2=4a-3b.$ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+3b.$

A. $\frac{-9+45\sqrt{13}}{18}$ **B.** $\frac{-9+5\sqrt{13}}{18}$ **C.** $\frac{-9+4\sqrt{13}}{18}$ **D.** $\frac{-9+45\sqrt{13}}{8}$

Lời giải

Bài 4.108: Ta có: $P=2a+3b\Rightarrow b=\frac{P-2a}{3}$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$a^2+(\frac{P-2a}{3})^2=4a-3(\frac{P-2a}{3})\Leftrightarrow 13a^2-2(27+2P)a+9P+P^2=0$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a. Tức là ta phải có:

$\Delta'=-9P^2-9P+729\ge 0\Leftrightarrow \frac{-9-45\sqrt{13}}{18}\le P\le \frac{-9+45\sqrt{13}}{18}$

Bài 4.109: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=5$ và $x-y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất $P=\frac{x+y-2}{z+2}$

A.0 **B.1** **C.2** **D.**3

Lời giải

Bài 4.109: Từ điều kiện ta có $x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=5-z^2\Rightarrow (x+y)^2=10-2z^2-(3-z)^2$

Do đó $(x+y)^2=1+6z-3z^2$

Dễ thấy $z\ne -2$. Ta có $P(z+2)+2=x+y$

Do đó $\left[P(z+2)+2\right]^2=1+6z-3z^2$

$\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 + 4(z+2)P + 4 = 1 + 6z - 3z^2$

$\Leftrightarrow (P^2+3)z^2 + (4P^2+4P-6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi $\Delta'_z \ge 0 \Leftrightarrow (2P^2+2P-3)^2 - (P^2+3)(4P^2+8P+3) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23} \le P \le 0$

Ta có $P=0$ khi $x=2,\ y=0,\ z=1$

$P = -\frac{36}{23}$ khi $x = \frac{20}{31},\ y = -\frac{66}{31},\ z = \frac{7}{31}$

Bài 4.110: Cho a, b, c là số thực. Chứng minh rằng $2(a+b+c-ab-bc-ca+1)^2 + (ab+bc+ca-2)^2 \ge 3$

Lời giải

Bài 4.110: Nếu $\left[\begin{array}{l} ab+bc+ca \le 2-\sqrt{3} \\ ab+bc+ca \ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$. thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2-\sqrt{3} \le ab+bc+ca \le 2+\sqrt{3}$. Ta đặt $x = a+b+c, y = ab+bc+ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$2(x-y+1)^2 + (y-2)^2 \ge 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3 \ge 0$.

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x(y-1) + 3y^2 - 8y + 3$. Ta dễ dàng tính được

$\Delta'_{f(x)} = 4(y-1)^2 - 2(3y^2 - 8y + 3) = -2y^2 + 8y - 2 = -2\left[y-(2-\sqrt{3})\right]\left[y-(2+\sqrt{3})\right] \le 0.$

Theo định lí về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 4.111: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6$. Chứng minh rằng $7a + 5b + 12ab \le 9$.

Lời giải

Bài 4.111: Xét tam thức bậc hai $f(a) = 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3$ với b là tham số

Ta có $\Delta_f = (4b+7)^2 - 36(7b^2 - 5b + 3) = -59(2b-1)^2 \le 0$

Suy ra $f(a) \ge 0 \Leftrightarrow 9a^2 - (4b+7)a + 7b^2 - 5b + 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab - 9 \le 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6$

Theo giả thiết ta có $9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6$ nên $7a + 5b + 12ab \le 9$.

Bài 4.112: Cho các số thực không âm *x,y,z* thỏa mãn: $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

A. $\max P = \frac{45}{18}$ **B.** $\max P = \frac{49}{148}$ **C.** $\max P = \frac{95}{148}$ **D.** $\max P = \frac{495}{148}$

Lời giải

Bài 4.112: Để ý rằng, với giả thiết $x + y + z = 1$ thì

$P = 9xy + 10yz + 11zx = 9xy + z(10y + 11x) = 9xy + (1 - x - y)(10y + 11x)$

Khai triển và rút gọn, ta thu được

$P = -11x^2 - 10y^2 + 11x + 10y - 12xy$

Tương đương với

$11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0 \quad (*)$

Coi đây là tam thức bậc hai ẩn *x*, do điều kiện tồn tại của *x* nên suy ra (*) phải có nghiệm, tức

$\Delta = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \ge 0$

Hay $-296y^2 + 176y + 121 - 44P \ge 0$

Tương đương $P \le -\frac{74}{11}\left(y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296}\right)$

Ta có $y^2 - \frac{22}{37}y - \frac{121}{296} \ge -\frac{5445}{10952}$ Suy ra $P \le \left(-\frac{74}{11}\right).\left(-\frac{5445}{10952}\right) = \frac{495}{148}$

Vậy $\max P = \frac{495}{148}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.

TỔNG HỢP LẦN 1.

Câu 1. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2 + 4x + 4 > 0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Câu 2. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2 - 6x + 9 > 0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Câu 3. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2 + 6x + 9 > 0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Câu 4. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2 + 2x + 1 > 0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Câu 5. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2 - 2x + 1 > 0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Câu 6. Tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-3$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>3$. **C.** $x<-2$ hoặc $x>6$. **D.** $-1<x<3$.

Câu 7. Tam thức $y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-13$ hoặc $x>1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>13$. **C.** $-13<x<1$. **D.** $-1<x<13$.

Câu 8. Tam thức $y=-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-4$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<1$ hoặc $x>4$. **C.** $-4<x<-4$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Câu 9. Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x<2$?

A. $y=x^2-5x+6$. **B.** $y=16-x^2$.

C. $y=x^2-2x+3$. **D.** $y=-x^2+5x-6$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$.

C. $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 11. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+x-1>0$ là:

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

C. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1-\sqrt{5}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 12. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-4x+4>0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-4\sqrt{2}x+8<0$ là:

A. $\left(-\infty;2\sqrt{2}\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-x-6<0$ là:

A. $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$.

C. $(-2;3)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2<9$ là:

A. $(-3;3)$. **B.** $(-\infty;-3)$.

C. $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-6\sqrt{2}x+18\ge 0$ là:

A. $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[3\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}\le 0$ là:

A. $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. B. $\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. C. $\left(-\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$. D. $\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right]$.

Câu 18. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. Nếu $a^2>0$ thì $a>0$. B. Nếu $a^2>a$ thì $a>0$.

C. Nếu $a^2>a$ thì $a<0$. D. Nếu $a<0$ thì $a^2>a$.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2+2x-8}{|x+1|}<0$ là:

A. $(-4;-1)\cup(-1;2)$. B. $(-4;-1)$.

C. $(-1;2)$. D. $(-2;-1)\cup(-1;1)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+1}{|4x-3|}<0$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cap\left(\dfrac{3}{4};1\right)$. B. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4};1\right)$.

C. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. D. $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{8-x^2}$ là

A. $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$. B. $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$.

C. $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$. D. $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ là

A. $[-5;1]$. B. $\left[-\dfrac{1}{5};1\right]$.

C. $(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$. D. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5x^2-4x-1}$ là

A. $\left(-\infty;\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$. B. $\left[-\dfrac{1}{5};1\right]$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$. D. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2}{x^2+5x-6}}$ là:

A. $(-\infty;-6]\cup[1;+\infty)$. B. $(-6;1)$.

C. $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$. D. $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2+x+12\right|>x^2+x+12$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $(-4;-3)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(-3;+\infty)$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2-x-12\right|>x+12-x^2$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

C. $(-6;-2)\cup(-3;4)$. **D.** $(-4;3)$.

Câu 27. Biểu thức $(m^2+2)x^2-2(m-2)x+2$ luôn nhận giá trị dương khi và chỉ khi:

A. $m\le -4$ hoặc $m\ge 0$. **B.** $m<-4$ hoặc $m>0$.

C. $-4<m<0$. **D.** $m<0$ hoặc $m>4$.

Câu 28. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-3;1]\cup[2;+\infty)$.

C. $(-3;1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 30. Tập nghiệm củabất phương trình $\sqrt{x}-2x<0$ là

A. $\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

C. $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$. **D.** $\{0\}\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 31. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{x}<2$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{m} > -1$ là

A. $(-2;0)$.

B. $(-\infty;-2)$.

C. $(-2;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 33. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-1}{1-x} > -x$ là

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

B. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $(1;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x}-3x \le 0$ là

A. $\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

B. $\left[0;\frac{1}{9}\right]$.

C. $\{0\}\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

D. $\{0\}\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

Câu 35. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{4}$ là

A. $(0;16]$. **B.** $[0;16]$. **C.** $(0;4]$. **D.** $[16;+\infty)$.

Câu 36. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \ge 3$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 37. Phương trình $(m+2)x^2-3x+2m-3=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-2$.

B. $-2<m<\frac{3}{2}$.

C. $m>\frac{3}{2}$.

D. $m<-2$ hoặc $m>\frac{3}{2}$.

Câu 38. Tập nghiệm của phương trình $|x^2-5x+6| = x^2-5x+6$ là

A. $\{2;3\}$.

B. $(2;3)$.

C. $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

D. $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

Câu 39. Tập nghiệm của phương trình $|x^2-7x+12| = 7x-x^2-12$ là

A. $\{3;4\}$. **B.** $(3;4)$.

C. $[3;4]$. **D.** $(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$.

Câu 40. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x^2-7x+10|}{\sqrt{x-3}}=\frac{x^2-7x+10}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $[5;+\infty)$. **B.** $(3;5]$. **C.** $[2;5]$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2-8x+12|}{\sqrt{5-x}}>\frac{x^2-8x+12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(2;6)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-6;-2)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 42. Nếu $2<m<8$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-mx+2m-3=0$ là

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** Chưa xác định được.

Câu 43. Phương trình $(m+1)x^2-x-3m+4=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-1$ hoặc $m>\frac{4}{3}$. **B.** $m<-1$ hoặc $m>\frac{3}{4}$.

C. $m>\frac{4}{3}$. **D.** $-1<m<\frac{4}{3}$.

Câu 44. Phương trình $x^2-mx-2m=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\le-2$ hoặc $m\ge0$. **B.** $m\le0$ hoặc $m\ge8$.

C. $-8\le m\le0$. **D.** $m\le-8$ hoặc $m\ge0$.

Câu 45. Phương trình $x^2-mx+m^2+m=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $0\le m\le\frac{4}{3}$. **B.** $-\frac{4}{3}\le m\le0$. **C.** $-\frac{1}{3}\le m\le0$. **D.** $0\le m\le\frac{1}{3}$.

Câu 46. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

A. 0. **B.** -4. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 47. Phương trình $mx^2-2mx+1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<0$ hoặc $m\ge1$. **B.** $m<0$ hoặc $m\ge4$.

C. $m\le0$ hoặc $m\ge1$. **D.** $0<m\le1$.

Câu 48. Phương trình $x^2-2(m+2)x+m^2-m-6=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-2$. **B.** $-3<m<2$. **C.** $m>-2$. **D.** $-2<m<3$.

Câu 49. Phương trình $x^2-4mx+m+3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 1$. **B.** $-\frac{3}{4} < m < 1$. **C.** $m \le \frac{-3}{4}$ hoặc $m \ge 1$. **D.** $-\frac{3}{4} \le m \le 1$.

Câu 50. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$.

C. $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$. **D.** $-3 \le m \le 1$.

Câu 51. Phương trình $x^2 - mx - m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $-1 < m < 0$. **B.** $-4 \le m \le 0$.

C. $-4 < m < 0$. **D.** $m < -4$ hoặc $m > 0$.

Câu 52. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m \le 0 \quad (1) \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 \quad (2) \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < -5$. **B.** $m > -5$. **C.** $m > 5$. **D.** $m < 5$.

Câu 53. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x+4}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. **D.** $(-4; +\infty)$.

Câu 54. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x - 3} + \sqrt{x^2 + 5x - 6}$ là

A. $[1; +\infty)$. **B.** $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$. **D.** $\left[-\frac{6}{5}; \frac{3}{4}\right]$.

Câu 55. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{2x - 3}$ là

A. $[1; +\infty)$. **B.** $[-2; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 56. Phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m = 2$. **B.** $-3 < m < 2$.

C. $m < -2$ hoặc $m > 3$. **D.** $-2 < m < 3$.

Câu 57. Hai phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ và $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$ cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 1$. **B.** $\frac{-3}{4} < m < 1$.

C. $m < \frac{-3}{4}$ hoặc $m > 1$. **D.** $\frac{-5}{4} < m < 1$.

Câu 58. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x-3} \ge \frac{1}{x+3}$ là

A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $(3; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 59. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ là

A. $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 60. Các giá trị của m để phương trình $3x^2+(3m-1)x+m^2-4=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $m<4$. **B.** $-2<m<2$.

C. $m<2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>2$.

Câu 61. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty;-1]$. **B.** $[-1;\infty)\setminus\{1\}$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(1;\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 62. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2}>1$ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Câu 63. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{-7}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 64. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1}+\frac{x-m}{\sqrt{x-1}}=\frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 65. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+3}{1-|x|}}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 66. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m^2(x-1)=-2x-5m+6$ có nghiệm dương là

A. $(-\infty;-1)\cup(-6;\infty)$. **B.** $(-1;6)$. **C.** $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 67. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5-2m}{\sqrt{1-x^2}}$ có nghiệm là

A. $(2;3)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 68. Cho biểu thức $M=x^2+3x+2$, trong đó x là nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$. Khi đó

A. $M<0$. **B.** $6<M<12$.

C. $M > 12$. **D.** M nhận giá trị bất kì.

Câu 69. Số dương x thoả mãn bất phương trình $\sqrt{x} < 3x$ khi và chỉ khi

A. $x > 9$. **B.** $x > \frac{1}{3}$. **C.** $x < \frac{1}{9}$. **D.** $x > \frac{1}{9}$.

Câu 70. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình bậc hai $x^2 + 2(m+1)x + 3m = 0$ có nghiệm là

A. $\{0\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 71. Phương trình $mx^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \le 0$ hoặc $m \ge 8$. **B.** $m < 0$ hoặc $m \ge 8$.

C. $0 < m \le 8$. **D.** $0 \le m \le 8$.

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+1} < 2x - 1$ là.

A. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$

Câu 73. Nếu $1 < m < 3$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 4m - 3 = 0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 74. Nếu $1 < m < 2$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 6 = 0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 75. Bất phương trình: $mx^2 - mx + 3 > 0$ với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m \le 0$ hoặc $m > 12$ **B.** $m < 0$ hoặc $m > 12$

C. $0 \le m < 12$ **D.** $0 < m < 12$

Câu 76. Tam thức $f(x) = 2mx^2 - 2mx - 1$ nhận giá trị âm với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m \le 2$ hoặc $m > 0$ **B.** $m < -2$ hoặc $m \ge 0$

C. $-2 < m < 0$ **D.** $-2 < m \le 0$

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - x + \frac{1}{4} \le 0$ có tập nghiệm là.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

TỔNG HỢP LẦN 2.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức f(x) có hai nghiệm?

A. $b \in \left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b \in \left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

C. $b \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 2. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - mx + 1 - 3m = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m > \frac{1}{3}$. **B.** $m < \frac{1}{3}$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$.

Câu 3. Gía trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m < 1$. **B.** $m > 2$. **C.** $m > 3$. **D.** $1 < m < 3$.

Câu 4. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; \frac{-3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(\frac{-3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(\frac{-3}{5}; +\infty\right)$. $ax^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 5. Tìm m để $(m+1)x^2 + mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m < -1$. **B.** $m > -1$. **C.** $m < \frac{-4}{3}$. **D.** $m > \frac{4}{3}$.

Câu 6. Tìm m để $f(x) = x^2 - 2(2m-3)x + 4m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m > \frac{3}{2}$. **B.** $m > \frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{4} < m < \frac{3}{2}$. **D.** $1 < m < 3$.

Câu 7. Với giá trị nào của a thì bất phương trình ?

A. $a = 0$. **B.** $a < 0$. **C.** $0 < a \leq \frac{1}{2}$. **D.** $a \geq \frac{1}{2}$.

Câu 8. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm?

A. $m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m < \frac{1}{4}$. **D.** $m > \frac{1}{4}$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **B.** $[2; +\infty)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Câu 10. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 2$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Câu 11. Gọi x_1, x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$. Khẳng định nào sau đúng?

A. $x_1 + x_2 = -5$. **B.** $x_1^2 + x_2^2 = 37$. **C.** $x_1x_2 = 6$. **D.** $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{13}{6} = 0$.

Câu 12. Các giá trị m làm cho biểu thức $x^2+4x+m-5$ luôn luôn dương là:

A. $m<9$. **B.** $m\ge 9$. **C.** $m>9$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 13. Các giá trị m để tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m\le 0$ hoặc $m\ge 28$. **B.** $m<0$ hoặc $m>28$. **C.** $0<m<28$. **D.** $m>0$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-7x-15}$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(5;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup[5;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup[5;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup[5;+\infty)$.

Câu 15. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x)=-x^2+5x-6$ được xác định như sau

A. $f(x)<0$ với $2<x<3$ và $f(x)>0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

B. $f(x)<0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)>0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

C. $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

D. $f(x)>0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)<0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

Câu 16. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2-2mx+m+3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

A. $m<6$ và $m\ne 2$. **B.** $m<0$ hoặc $2<m<6$.

C. $2<m<6$. **D.** $m>6$.

Câu 17. Cho $f(x)=mx^2-2x-1$. Xác định m để $f(x)<0$ với $x\in\mathbb{R}$.

A. $m<-1$. **B.** $m<0$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m<1$ và $m\ne 0$.

Câu 18. Xác định m để phương trình $(m-3)x^3+(4m-5)x^2+(5m+4)x+2m+4=0$ có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

A. $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\ne 12$. **B.** $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\ne 4$.

C. $m\in\varnothing$. **D.** $0<m<\frac{5}{4}$.

Câu 19. Cho phương trình $(m-5)x^2+(m-1)x+m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<2<x_2$.

A. $m<\frac{22}{7}$. **B.** $\frac{22}{7}<m<5$. **C.** $m\ge 5$. **D.** $\frac{22}{7}\le m\le 5$.

Câu 20. Cho phương trình $x^2-2x-m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1<x_2<2$.

A. $m>0$. **B.** $m<-1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>-\frac{1}{4}$.

Câu 21. Cho $f(x)=-2x^2+(m-2)x-m+4$. Tìm m để $f(x)$ không dương với mọi x.

A. $m \in \varnothing$. **B.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m = 6$.

Câu 22. Xác định m để phương trình $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn –1.

A. $m < -\frac{7}{2}$. **B.** $-2 < m < 1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. **D.** $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Câu 23. Phương trình $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thoả $2 < x_1 < x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2 < m < -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $-5 < m < -3$. **D.** $-2 < m < 1$.

Câu 24. Cho bất phương trình $(2m+1)x^2+3(m+1)x+m+1>0$ (1). Với giá trị nào của m thì bất phương trình trên vô nghiệm.

A. $m \neq -\frac{1}{2}$. **B.** $-5 < m < -1$. **C.** $-5 \leq m \leq -1$. **D.** $m \in \varnothing$.

Câu 25. Cho phương trình $mx^2-2(m+1)x+m+5=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

A. $-5 < m < -1$. **B.** $-1 < m < 5$. **C.** $m < -5$ hoặc $m > 1$. **D.** $m > -1$ và $m \neq 0$.

Câu 26. Cho $f(x)=-2x^2+(m+2)x+m-4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $-14 < m < 2$. **B.** $-14 \leq m \leq 2$.

C. $-2 < m < 14$. **D.** $m < -14$ hoặc $m > 2$.

Câu 27. Tìm m để phương trình $x^2-2(m+2)x+m+2=0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m = 0$. **B.** $m < -1$ hoặc $m > -\frac{2}{3}$.

C. $m > -\frac{2}{3}$. **D.** $-1 < m < -\frac{2}{3}$.

Câu 28. Cho $f(x)=3x^2+2(2m-1)x+m+4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{11}{4}$. **B.** $-1 < m < \frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{11}{4} < m < 1$. **D.** $-1 \leq m \leq \frac{11}{4}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	A	C	D	C	D	C	B	C	C	B	B	C	C	A	A	B	C

21	22	23	24	25	26	27	28												
D	D	A	C	A	A	D	B												

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

336 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BIÊN SOẠN VÀ SƯU TẦM

0946.798.489

Câu 1. Nếu $a>b$ và $c>d$. thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $ac>bd$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $a-d>b-c$. **D.** $-ac>-bd$.

Câu 2. Nếu $m>0$, $n<0$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $m>-n$. **B.** $n-m<0$. **C.** $-m>-n$. **D.** $m-n<0$.

Câu 3. Nếu a,b và c là các số bất kì và $a>b$ thì bất đẳng nào sau đây đúng?

A. $ac>bc$. **B.** $a^2<b^2$. **C.** $a+c>b+c$. **D.** $c-a>c-b$.

Câu 4. Nếu $a>b$ và $c>d$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $ac>bd$. **D.** $a+c>b+d$.

Câu 5. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực a?

A. $6a>3a$. **B.** $3a>6a$. **C.** $6-3a>3-6a$. **D.** $6+a>3+a$.

Câu 6. Nếu a,b,c là các số bất kì và $a<b$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $3a+2c<3b+2c$. **B.** $a^2<b^2$. **C.** $ac>bc$. **D.** $ac<bc$.

Câu 7. Nếu $a>b>0$, $c>d>0$ thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $ac>bc$. **B.** $a-c>b-d$. **C.** $a^2>b^2$. **D.** $ac>bd$.

Câu 8. Nếu $a>b>0$, $c>d>0$. thì bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a+c>b+d$. **B.** $ac>bd$. **C.** $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. **D.** $\frac{a}{b}>\frac{d}{c}$.

Câu 9. Sắp xếp ba số $\sqrt{6}+\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$ và $\sqrt{3}+\sqrt{16}$ theo thứ tự từ bé đến lớn thì thứ tự đúng là

A. $\sqrt{19},\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{6}+\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{19},\sqrt{6}+\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{19},\sqrt{6}+\sqrt{13},\sqrt{3}+\sqrt{16}$. **D.** $\sqrt{6}+\sqrt{13},\sqrt{3}+\sqrt{16},\sqrt{19}$.

Câu 10. Nếu $a+2c>b+2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a>-3b$. **B.** $a^2>b^2$. **C.** $2a>2b$. **D.** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Câu 11. Nếu $2a>2b$ và $-3b<-3c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a<c$. **B.** $a>c$. **C.** $-3a>-3c$. **D.** $a^2>c^2$.

Câu 12. Một tam giác có độ dài các cạnh là $1,2,x$ trong đó x là số nguyên. Khi đó, x bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13. Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây có thể nhận giá trị âm?

A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

Câu 14. Với số thực a bất kì, biểu thức nào sau đây luôn luôn dương.

A. a^2+2a+1. **B.** a^2+a+1. **C.** a^2-2a+1. **D.** a^2+2a-1.

Câu 15. Trong các số $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $2+\sqrt{3}$, 4

A. số **nhỏ** nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $2+\sqrt{3}$. **B.** số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là 4.

C. số **nhỏ** nhất là $\sqrt{15}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$. **D.** số nhỏ nhất là $2+\sqrt{3}$, số lớn nhất là $3+\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho hai số thực a,b sao cho $a>b$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng**?

A. $a^4 > b^4$. **B.** $-2a+1 < -2b+1$. **C.** $b-a<0$. **D.** $a-2>b-2$.

Câu 17. Nếu $0<a<1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $\frac{1}{a} > \sqrt{a}$. **B.** $a > \frac{1}{a}$. **C.** $a > \sqrt{a}$. **D.** $a^3 > a^2$.

Câu 18. Cho a,b,c,d là các số thực trong đó $a,c \neq 0$. Nghiệm của phương trình $ax+b=0$ nhỏ hơn nghiệm của phương trình $cx+d=0$ khi và chỉ khi

A. $\frac{b}{a} < \frac{c}{d}$. **B.** $\frac{b}{a} > \frac{c}{d}$. **C.** $\frac{b}{d} > \frac{a}{c}$. **D.** $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

Câu 19. Nếu $a+b<a$ và $b-a>b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab>0$. **B.** $b<a$. **C.** $a<b<0$. **D.** $a>0$ và $b<0$.

Câu 20. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây **không đúng** ?

A. $a^2 < ab+ac$. **B.** $ab+bc>b^2$. **C.** $b^2+c^2<a^2+2bc$. **D.** $b^2+c^2>a^2+2bc$.

Câu 21. Cho $f(x)=x-x^2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ có **giá** trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. **B.** $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{4}$. **D.** $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 0, giá trị lớn nhất bằng 1.

B. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất bằng 1.

C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất là 1, giá trị lớn nhất bằng 2.

D. $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 23. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2a-1 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x.y$ lớn nhất

A. $a=\frac{1}{4}$. **B.** $a=\frac{1}{2}$. **C.** $a=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

Câu 24. Cho biết hai số a và b có tổng bằng 3 . Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá **trị** nhỏ nhất là $\frac{9}{4}$. **B.** có giá trị lớn nhất là $\frac{9}{4}$.

C. có giá trị **lớn** nhất là $\frac{3}{2}$. **D.** không có giá trị lớn nhất.

Câu 25. Cho $a-b=2$. Khi đó, tích hai số a và b

A. có giá trị **nhỏ** nhất là -1 . **B.** có giá trị lớn nhất là -1 .

C. có giá trị nhỏ nhất khi $a=b$. **D.** không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 26. Cho $x^2+y^2=1$, gọi $S=x+y$. Khi đó ta có

A. $S \leq -\sqrt{2}$. **B.** $S \geq \sqrt{2}$.

C. $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$. **D.** $-1 \leq S \leq 1$.

Câu 27. Cho x, y là hai số thực thay đổi sao cho $x+y=2$. Gọi $m=x^2+y^2$. Khi đó ta có:

A. giá trị nhỏ nhất của m là 2. **B.** giá trị nhỏ nhất của m là 4.
C. giá trị lớn nhất của m là 2. **D.** giá trị lớn nhất của m là 4.

Câu 28. Với mỗi $x>2$, trong các biểu thức: $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+1}{2}$, $\frac{x}{2}$ giá trị biểu thức nào là nhỏ nhất?

A. $\frac{2}{x}$. **B.** $\frac{2}{x+1}$. **C.** $\frac{2}{x-1}$. **D.** $\frac{x}{2}$.

Câu 29. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức x^2+3x với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{9}{4}$. **C.** $-\frac{27}{4}$. **D.** $-\frac{81}{8}$.

Câu 30. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2+3|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $-\frac{9}{4}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất củabiểu thức $x^2-6|x|$ với $x\in\mathbb{R}$ là:

A. -9. **B.** -6. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 32. Cho biểu thức $P=-a+\sqrt{a}$ với $a\geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{4}$. **B.** Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.

C. Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. **D.** P đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=\frac{1}{4}$.

Câu 33. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\frac{11}{4}$. **B.** $\frac{4}{11}$. **C.** $\frac{11}{8}$. **D.** $\frac{8}{11}$.

Câu 34. Cho biểu thức $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị lớn nhất, không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số $f(x)$ chỉ có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.
D. Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.

Câu 35. Cho a là số thực bất kì, $P=\frac{2a}{a^2+1}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi a?

A. $P>-1$. **B.** $P>1$. **C.** $P<-1$. **D.** $P\leq 1$.

Câu 36. Cho $Q=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ với a,b,c là ba số thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số dương.
B. $Q\geq 0$ chỉ đúng khi a,b,c là những số không âm.
C. $Q>0$. với a,b,c là những số bất kì.
D. $Q\geq 0$ với a,b,c là những số bất kì.

Câu 37. Số nguyên a lớn nhất sao cho $a^{200} < 3^{300}$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 38. Điền dấu $(>, <, \geq, \leq)$ thích hợp vào ô trống để được một bất đẳng thức đúng

A. Nếu a,b dương thì $\frac{ab}{a+b} \square \frac{a+b}{4}$.

B. Với a,b bất kỳ $2(a^2 - ab + b^2) \square a^2 + b^2$.

C. Nếu a,b,c dương thì $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \square 1$.

Câu 39. Cho a,b là các số thực. Xét tính đúng–sai của các mệnh đề sau:

A. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$.

B. $a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$.

C. $a^2 + b^2 + 9 > 3(a+b) + ab$.

Câu 40. Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a+b| = |a| + |b|$. **B.** $|a+b| \leq |a| + |b|$. **C.** $|a+b| < |a| + |b|$. **D.** $|a+b| > |a| + |b|$.

Câu 41. Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|-ab| < |a|.|b|$.

B. $\left|\frac{a}{b}\right| > \frac{|a|}{|-b|}$ với $b \neq 0$.

C. Nếu $|a| < |b|$ thì $a^2 < b^2$.

D. $|a-b| > |a| - |b|$.

Câu 42. Cho hai số thực a,b tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $|a-b| \leq |a| + |b|$.

B. $|a-b| = |a| + |b|$.

C. $|a-b| = |a| - |b|$.

D. $|a-b| > |a| - |b|$.

Câu 43. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi số thực x?

A. $|x| > x$. **B.** $|x| > -x$. **C.** $|x|^2 > x^2$. **D.** $|x| \geq x$.

Câu 44. Nếu a,b là những số thực và $|a| \leq |b|$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a^2 \leq b^2$.

B. $\frac{1}{|a|} \leq \frac{1}{|b|}$ với $ab \neq 0$.

C. $-b \leq a \leq b$.

D. $a \leq b$.

Câu 45. Cho $a > 0$. Nếu $x < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $|x| < a$. **B.** $-x \leq |x|$. **C.** $|x| < |a|$. **D.** $\frac{1}{|x|} > \frac{1}{a}$.

Câu 46. Nếu $|x| < a$ thì bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $x < -a$. **B.** $\frac{1}{x} < \frac{1}{a}$. **C.** $-|x| < -a$. **D.** $x < a$.

Câu 47. Cho $a \geq 1, b \geq 1$. Bất đẳng thức nào sau đây **không đúng** ?

A. $a \ge 2\sqrt{a-1}$.   **B.** $ab \ge 2a\sqrt{b-1}$.
C. $ab < 2b\sqrt{a-1}$.   **D.** $2\sqrt{b-1} \le b$.

Câu 48. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x}$ với $x > 0$ là

A. 4.   **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.   **C.** $\sqrt{2}$.   **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 49. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ với $x > 0$ là

A. $4\sqrt{3}$.   **B.** $\sqrt{6}$.   **C.** $2\sqrt{3}$.   **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 50. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$ là

A. 2.   **B.** $\frac{5}{2}$.   **C.** $2\sqrt{2}$.   **D.** 3.

Câu 51. Cho $x \ge 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x}$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.   **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}}$.   **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.   **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 52. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là

A. 2.   **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.   **C.** $\sqrt{2}$.   **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 53. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$ là

A. 1.   **B.** 2.   **C.** 3.   **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 54. Cho a,b,c,d là các số dương. Hãy điền dấu $(>,<,\ge,\le)$ thích hợp vào ô trống

A. Nếu $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ thì $\frac{a+b}{a} \boxed{<} \frac{c+d}{c}$.   **B.** Nếu $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ thì $\frac{a+b}{b} \boxed{>} \frac{c+d}{d}$.
C. $a+b+c \boxed{\ge} \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.   **D.** $2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \boxed{\le} 2ab + a + b$.

Câu 55. Điền số thích hợp vào chỗ chấm để được mệnh đề đúng
A. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ với $1 \le x \le 3$ là.... $2\sqrt{2}$ khi $x = 2$ ....
B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 - 5x + 1$ là ......$-\frac{17}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}$ ....

Câu 56. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Hãy xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $ab + bc + ca \ge 0$. Sai   **B.** $ab + bc + ca \ge -\frac{1}{2}$. Đúng
C. $ab + bc + ca < 1$. Sai   **D.** $ab + bc + ca \le 1$. Đúng

Câu 57. Số $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?
A. $5 - x < 1$.   **B.** $3x + 1 < 4$.   **C.** $4x - 11 > x$.   **D.** $2x - 1 > 3$.

Câu 58. Số $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $3-x<0$. **B.** $2x+1<0$. **C.** $2x-1>0$. **D.** $x-1>0$.

Câu 59. Số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}}>\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 60. Số $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $m-x^2<2$ khi và chỉ khi

A. $m>3$. **B.** $m<3$. **C.** $m=3$. **D.** $m<1$.

Câu 61. Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $2m-3mx^2\geq 1$ khi và chỉ khi

A. $m\leq -1$. **B.** $m\leq 1$. **C.** $-1\leq m\leq 1$. **D.** $m\geq -1$.

Câu 62. Xác định tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

A. $x+2\sqrt{x-1}>2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x>0$. Sai **B.** $x+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x>0$. Đúng

C. $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2\leq 2\Leftrightarrow 2x-3\leq 2$. Sai **D.** $x+\sqrt{x-1}>\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x>0$. Sai

Câu 63. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $2x>1$?

A. $2x+\sqrt{x-2}>1+\sqrt{x-2}$. **B.** $2x-\frac{1}{x-3}>1-\frac{1}{x-3}$.

C. $4x^2>1$. **D.** $2x+\sqrt{x+2}>1+\sqrt{x+2}$.

Câu 64. Tập nghiệm của bất phương trình $3-2x<x$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 65. Tập nghiệm của bất phương trình $2x+1>3(2-x)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;5)$.

Câu 66. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ là:

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. **B.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 67. Tập nghiệm của bất phương trình $5x-2(4-x)>0$ là:

A. $\left(\frac{8}{7};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{8}{7}\right)$. **D.** $\left(-\frac{8}{7};+\infty\right)$.

Câu 68. Tập nghiệm của bất phương trình $3x<5(1-x)$ là:

A. $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{5}{8}\right)$.

Câu 69. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ là:

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 70. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x-3|}{\sqrt{x-2}}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $\{3\}$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 71. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x-2}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(2;\infty)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 72. Tập nghiệm của bất phương trình $3-2x+\sqrt{2-x} < x+\sqrt{2-x}$ là

A. $(1;2)$. **B.** $(1;2]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 73. Phương trình $\frac{|6-x|}{\sqrt{1-4x}} = \frac{2x+3}{\sqrt{1-4x}}$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** nhiều hơn 2.

Câu 74. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $(m^2+2m)x \le m^2$ thoả mãn với mọi x là

A. $(-2;0)$. **B.** $\{-2;0\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $[-2;0]$.

Câu 75. Tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $(m^2-m)x < m$ vô nghiệm là

A. $(0;1)$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 76. Phương trình $x^2-7mx-m-6=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-6$. **B.** $m>-6$. **C.** $m<6$. **D.** $m>6$.

Câu 77. Phương trình $x^2-2mx+m^2+3m-1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<\frac{1}{3}$. **B.** $m\le\frac{1}{3}$. **C.** $m\ge\frac{1}{3}$. **D.** $m\ge-\frac{1}{3}$.

Câu 78. Phương trình $(m^2+1)x^2-x-2m+3=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m>\frac{2}{3}$. **B.** $m<\frac{3}{2}$. **C.** $m>\frac{3}{2}$. **D.** $m>-\frac{3}{2}$.

Câu 79. Phương trình $x^2+4mx+4m^2-2m-5=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\ge\frac{-5}{2}$. **B.** $m>\frac{-5}{2}$. **C.** $m\ge\frac{5}{2}$. **D.** $m\le\frac{-5}{2}$.

Câu 80. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+2>2x+3\\1-x>0\end{cases}$ là:

A. $\left(\frac{1}{5};1\right)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\varnothing$ (tập rỗng).

Câu 81. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x-1}{|x+3|}<0$ là

A. $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\backslash\{-3\}$.

Câu 82. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+1>3x-2\\-x-3<0\end{cases}$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 83. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-5\ge 0\\8-3x\ge 0\end{cases}$ là

A. $\left[\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{3}{8};\frac{2}{5}\right]$. **C.** $\left[\frac{8}{3};\frac{5}{2}\right]$. **D.** $\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Câu 84. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{2-3x}}+\sqrt{2x-1}$ là:

A. $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 85. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4-3x}$ là

A. $\left[\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right]$. **B.** $\left[\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]$. **C.** $\left[\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\varnothing$.

Câu 86. Hai đẳng thức: $|2x-3|=2x-3;|3x-8|=8-3x$ cùng xảy ra khi và chỉ khi:

A. $\frac{8}{3}\le x\le\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}\le x\le\frac{8}{3}$. **C.** $x\le\frac{8}{3}$. **D.** $x\ge\frac{3}{2}$.

Câu 87. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{3-2x}+\sqrt{5-6x}$ là

A. $\left(-\infty;\frac{5}{6}\right]$. **B.** $\left(-\infty;\frac{6}{5}\right]$. **C.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$.

Câu 88. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-6}$ là

A. $\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{6}{5};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left[\frac{3}{4};\frac{6}{5}\right]$.

Câu 89. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|1-x|}{\sqrt{3-x}}>\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 90. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x+4}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)\setminus\{4\}$. **C.** $(1;+\infty)\setminus\{4\}$. **D.** $(-4;+\infty)$.

Câu 91. Tập hợp nghiêm của bất phương trình $|x-1|<x+1$ là:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Câu 92. Tập hợp nghiêm của bất phương trình $|x-1|\le x-1$ là:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 93. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2a-1\end{cases}$ có nghiệm (x;y) với x > y?

A. $a>\frac{1}{2}$. **B.** $a>\frac{1}{3}$. **C.** $a>-\frac{1}{2}$. **D.** $a<\frac{1}{2}$.

Câu 94. Hệ phương trình $\begin{cases}2x-1>0\\x-m<3\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<-\dfrac{5}{2}$. **B.** $m\le-\dfrac{5}{2}$. **C.** $m<\dfrac{7}{2}$. **D.** $m\ge-\dfrac{5}{2}$.

Câu 95. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x+m\le 0\ \ (1)\\-x+5<0\ \ (2)\end{cases}$. Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<-5$. **B.** $m>-5$. **C.** $m>5$. **D.** $m<5$.

Câu 96. Phương trình $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m<3$. **B.** $m<1$. **C.** $m=1$. **D.** $1<m<3$.

Câu 97. Phương trình $x^2+x+m=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>-\dfrac{3}{4}$. **B.** $m<-\dfrac{3}{4}$. **C.** $m>\dfrac{1}{4}$. **D.** $m>-\dfrac{5}{4}$.

Câu 98. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x-1}{x-3}>1$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;5)$.

Câu 99. Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1>0\\x-m<2\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m<-\dfrac{3}{2}$. **B.** $m\le-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m\ge-\dfrac{3}{2}$.

Câu 100. Tập hợp các giá trị m để hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1\ge 3\\x-m\le 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất là

A. $\varnothing$. **B.** $\{2\}$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 101. Hệ phương trình $\begin{cases}x+y=2\\x-y=5a-2\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ với $x<0$ khi và chỉ khi

A. $a<\dfrac{2}{5}$. **B.** $a>\dfrac{2}{5}$. **C.** $a<\dfrac{6}{5}$. **D.** $a<\dfrac{5}{2}$.

Câu 102. Phương trình $3(|x|-m)=|x|+m-1$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\ge\dfrac{1}{4}$. **C.** $m<\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\ge 4$.

Câu 103. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{|3-x|}{\sqrt{1-2x}}=\dfrac{2x+3}{\sqrt{1-2x}}$ là bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Nhiều hơn 2.

Câu 104. Tập nghiệm của phương trình $\dfrac{|1-x|}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[2;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 105. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{|1-x|}{\sqrt{3-x}}>\dfrac{x-1}{\sqrt{3-x}}$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $[1;3)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 106. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi x nhỏ hơn 2 ?

A. $f(x)=3x+6$. **B.** $f(x)=6-3x$. **C.** $f(x)=4-3x$. **D.** $f(x)=3x-6$.

Câu 107. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi số x nhỏ hơn $-\frac{2}{3}$?

A. $f(x)=-6x-4$. **B.** $f(x)=3x+2$. **C.** $f(x)=-3x-2$. **D.** $f(x)=2x+3$.

Câu 108. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi số x nhỏ hơn $-\frac{3}{2}$?

A. $f(x)=2x+3$. **B.** $f(x)=-2x-3$. **C.** $f(x)=-3x-2$. **D.** $f(x)=-2x+3$.

Câu 109. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi x lớn hơn 2 ?

A. $f(x)=2x-1$. **B.** $f(x)=x-2$. **C.** $f(x)=2x+5$. **D.** $f(x)=6-3x$.

Câu 110. Nhị thức $-5x+1$ nhận giá trị âm khi

A. $x<\frac{1}{5}$. **B.** $x<-\frac{1}{5}$. **C.** $x>-\frac{1}{5}$. **D.** $x>\frac{1}{5}$.

Câu 111. Nhị thức $-3x+2$ nhận giá trị dương khi

A. $x<\frac{3}{2}$. **B.** $x<\frac{2}{3}$. **C.** $x>-\frac{3}{2}$. **D.** $x>\frac{2}{3}$.

Câu 112. Nhị thức $-2x-3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-\frac{3}{2}$. **B.** $x<-\frac{2}{3}$. **C.** $x>-\frac{3}{2}$. **D.** $x>-\frac{2}{3}$.

Câu 113. Nhị thức nào sau đây nhận giá trị dương với mọi x nhỏ hơn 2?

A. $f(x)=3x+6$. **B.** $f(x)=6-3x$. **C.** $f(x)=4-3x$. **D.** $f(x)=3x-6$.

Câu 114. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 115. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-2m}-\sqrt{4-2x}$ là $[1;2]$ khi và chỉ khi

A. $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m>\frac{1}{2}$.

Câu 116. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-m}-\sqrt{6-2x}$ là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

A. $m=3$ **B.** $m<3$ **C.** $m>3$ **D.** $m<\frac{1}{3}$

Câu 117. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{m-2x}-\sqrt{x+1}$ là một đoạn trên trục số khi và chỉ khi

A. $m<-2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-2$.

Câu 118. Ghép mỗi ý ở cột bên trái với một ý ở cột bên phải để được một mệnh đề đúng:

A. Nghiệm của bất phương trình $-3x+1<0$ là

(1) $x=\frac{1}{3}$

B. Nhị thức $-3x+1$ có dấu dương khi và chỉ khi

C. Nghiệm của nhị thức $3x-1$ là

(2) $x=-\frac{1}{3}$

(3) $x<\frac{1}{3}$

(4) $x>\frac{1}{3}$

Câu 119. Cặp số $(1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $x+y-3>0$. **B.** $-x-y<0$. **C.** $x+3y+1<0$. **D.** $-x-3y-1<0$.

Câu 120. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $2x-3y-1>0$. **B.** $x-y<0$. **C.** $4x>3y$. **D.** $x-3y+7<0$.

Câu 121. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-2(x-y)+y>3$?

A. $(4;-4)$. **B.** $(2;1)$. **C.** $(-1;-2)$. **D.** $(4;4)$.

Câu 122. Bất phương trình $3x-2(y-x+1)>0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $x-2y-2>0$. **B.** $5x-2y-2>0$. **C.** $5x-2y-1>0$. **D.** $4x-2y-2>0$.

Câu 123. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $5x-2(y-1)\le 0$?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 124. Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x+3y+2\le 0$. **B.** $x+y+2\le 0$. **C.** $2x+5y-2\ge 0$. **D.** $2x+y+2\ge 0$.

Câu 125. Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases}x+3y-6>0\\2x+y+4>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x+3y-6>0\\2x+y+4<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x+3y-6<0\\2x+y+4>0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x+3y-6<0\\2x+y+4<0\end{cases}$.

Câu 126. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x+3y-2\ge 0\\2x+y+1\le 0\end{cases}$

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 127. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+4x+4>0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 128. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-6x+9>0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 129. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+6x+9>0$ là:

A. $(3;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 130. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2+2x+1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 131. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-2x+1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 132. Tam thức $y=x^2-2x-3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x<-3$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>3$. **C.** $x<-2$ hoặc $x>6$. **D.** $-1<x<3$.

Câu 133. Tam thức $y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-13$ hoặc $x>1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>13$. **C.** $-13<x<1$. **D.** $-1<x<13$.

Câu 134. Tam thức $y=-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-4$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<1$ hoặc $x>4$. **C.** $-4<x<-4$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Câu 135. Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x<2$?

A. $y=x^2-5x+6$. **B.** $y=16-x^2$. **C.** $y=x^2-2x+3$. **D.** $y=-x^2+5x-6$.

Câu 136. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-1>0$ là:

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 137. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+x-1>0$ là:

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

C. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1-\sqrt{5}\right)\cup\left(-1+\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 138. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-4x+4>0$ là:

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 139. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-4\sqrt{2}x+8<0$ là:

A. $\left(-\infty;2\sqrt{2}\right)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2\sqrt{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 140. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-x-6<0$ là:

A. $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-2;3)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 141. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2<9$ là:

A. $(-3;3)$. **B.** $(-\infty;-3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 142. Tập nghiệm củabất phương trình $x^2-6\sqrt{2}x+18\geq 0$ là:

A. $\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[3\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 143. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}\leq 0$ là:

A. $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. **C.** $\left(-\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right]$.

Câu 144. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng ?

A. Nếu $a^2>0$ thì $a>0$. **B.** Nếu $a^2>a$ thì $a>0$.

C. Nếu $a^2>a$ thì $a<0$. **D.** Nếu $a<0$ thì $a^2>a$.

Câu 145. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x^2+2x-8}{|x+1|}<0$ là:

A. $(-4;-1)\cup(-1;2)$. **B.** $(-4;-1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-2;-1)\cup(-1;1)$.

Câu 146. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+1}{|4x-3|}<0$ là

A. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cap\left(\dfrac{3}{4};1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4};1\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 147. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{8-x^2}$ là

A. $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$.

C. $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]\cup\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 148. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ là

A. $[-5;1]$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{5};1\right]$.

C. $(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 149. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{5x^2-4x-1}$ là

A. $\left(-\infty;\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{5};1\right]$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 150. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2}{x^2+5x-6}}$ là:

A. $(-\infty;-6]\cup[1;+\infty)$. **B.** $(-6;1)$.

C. $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.

Câu 151. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2+x+12\right|>x^2+x+12$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $(-4;-3)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(-3;+\infty)$.

Câu 152. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|x^2-x-12\right|>x+12-x^2$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

C. $(-6;-2)\cup(-3;4)$. **D.** $(-4;3)$.

Câu 153. Biểu thức $\left(m^2+2\right)x^2-2(m-2)x+2$ luôn nhận giá trị dương khi và chỉ khi:

A. $m\le-4$ hoặc $m\ge0$. **B.** $m<-4$ hoặc $m>0$.

C. $-4<m<0$. **D.** $m<0$ hoặc $m>4$.

Câu 154. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 155. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $(-3;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-3;1]\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 156. Tập nghiệm củabất phương trình $\sqrt{x}-2x<0$ là

A. $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left[0;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $\{0\}\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Câu 157. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x}<2$ là

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

C. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 158. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{m} > -1$ là

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 159. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-1}{1-x} > -x$ là

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 160. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x}-3x \le 0$ là

A. $\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[0;\frac{1}{9}\right]$. **C.** $\{0\}\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$. **D.** $\{0\}\cup\left[\frac{1}{9};+\infty\right)$.

Câu 161. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} \ge \frac{1}{4}$ là

A. $(0;16]$. **B.** $[0;16]$. **C.** $(0;4]$. **D.** $[16;+\infty)$.

Câu 162. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \ge 3$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 163. Phương trình $(m+2)x^2-3x+2m-3=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$. **B.** $-2 < m < \frac{3}{2}$.

C. $m > \frac{3}{2}$. **D.** $m < -2$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

Câu 164. Tập nghiệm của phương trình $|x^2-5x+6| = x^2-5x+6$ là

A. $\{2;3\}$. **B.** $(2;3)$.

C. $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

Câu 165. Tập nghiệm của phương trình $|x^2-7x+12| = 7x-x^2-12$ là

A. $\{3;4\}$. **B.** $(3;4)$. **C.** $[3;4]$. **D.** $(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$.

Câu 166. Tập nghiệm của phương trình $\frac{|x^2-7x+10|}{\sqrt{x-3}} = \frac{x^2-7x+10}{\sqrt{x-3}}$ là

A. $[5;+\infty)$. **B.** $(3;5]$. **C.** $[2;5]$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 167. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2-8x+12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2-8x+12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $(2;6)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-6;-2)$. **D.** $(5;6)$.

Câu 168. Nếu $2 < m < 8$ thì số nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ là

A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** Chưa xác định được.

Câu 169. Phương trình $(m+1)x^2 - x - 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{4}{3}$. **B.** $m < -1$ hoặc $m > \frac{3}{4}$.

C. $m > \frac{4}{3}$. **D.** $-1 < m < \frac{4}{3}$.

Câu 170. Phương trình $x^2 - mx - 2m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \le -2$ hoặc $m \ge 0\cdot$ **B.** $m \le 0$ hoặc $m \ge 8\cdot$

C. $-8 \le m \le 0\cdot$ **D.** $m \le -8$ hoặc $m \ge 0\cdot$

Câu 171. Phương trình $x^2 - mx + m^2 + m = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 \le m \le \frac{4}{3}\cdot$ **B.** $-\frac{4}{3} \le m \le 0\cdot$ **C.** $-\frac{1}{3} \le m \le 0\cdot$ **D.** $0 \le m \le \frac{1}{3}\cdot$

Câu 172. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

A. 0. **B.** –4. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}\cdot$

Câu 173. Phương trình $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 0$ hoặc $m \ge 1\cdot$ **B.** $m < 0$ hoặc $m \ge 4\cdot$

C. $m \le 0$ hoặc $m \ge 1\cdot$ **D.** $0 < m \le 1\cdot$

Câu 174. Phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A. $m < -2$. **B.** $-3 < m < 2$. **C.** $m > -2$. **D.** $-2 < m < 3$.

Câu 175. Phương trình $x^2 - 4mx + m + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < 1$. **B.** $-\frac{3}{4} < m < 1\cdot$ **C.** $m \le \frac{-3}{4}$ hoặc $m \ge 1\cdot$ **D.** $-\frac{3}{4} \le m \le 1\cdot$

Câu 176. Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$.

C. $m \le -3$ hoặc $m \ge 1\cdot$ **D.** $-3 \le m \le 1\cdot$

Câu 177. Phương trình $x^2 - mx - m = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $-1 < m < 0$. **B.** $-4 \le m \le 0\cdot$

C. $-4 < m < 0$. **D.** $m < -4$ hoặc $m > 0$.

Câu 178. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m \le 0 & (1) \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 & (2) \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < -5$. **B.** $m > -5$. **C.** $m > 5$. **D.** $m < 5$.

Câu 179. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{1}{x+4}$ là

A. $\mathbb{R}$.　**B.** $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.　**C.** $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.　**D.** $(-4;+\infty)$.

Câu 180. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4x-3}+\sqrt{x^2+5x-6}$ là

A. $[1;+\infty)$.　**B.** $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.　**C.** $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$.　**D.** $\left[-\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{4}\right]$.

Câu 181. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2x-3}$ là

A. $[1;+\infty)$.　**B.** $[-2;1]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.　**C.** $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.　**D.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 182. Phương trình $x^2-2(m-2)x+m^2-m-6=0$ có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

A. $m=2$.　**B.** $-3<m<2$.

C. $m<-2$ hoặc $m>3$.　**D.** $-2<m<3$.

Câu 183. Hai phương trình $x^2+x+m+1=0$ và $x^2+(m+1)x+1=0$ cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0<m<1$.　**B.** $\dfrac{-3}{4}<m<1$.

C. $m<\dfrac{-3}{4}$ hoặc $m>1$.　**D.** $\dfrac{-5}{4}<m<1$.

Câu 184. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{x-3}\ge\dfrac{1}{x+3}$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.　**B.** $\mathbb{R}$.　**C.** $(3;+\infty)$.　**D.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 185. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ là

A. $\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.　**B.** $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.　**C.** $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.　**D.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 186. Các giá trị của m để phương trình $3x^2+(3m-1)x+m^2-4=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $m<4$.　**B.** $-2<m<2$.

C. $m<2$.　**D.** $m<-2$ hoặc $m>2$.

Câu 187. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{1-x}}$ là

A. $(-\infty;-1]$.　**B.** $[-1;\infty)\setminus\{1\}$.　**C.** $(-\infty;-1]\cup(1;\infty)$.　**D.** $(-\infty;1)$.

Câu 188. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+2}>1$ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.　**B.** $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$.

C. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.　**D.** $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Câu 189. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\dfrac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{-7}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{-5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 190. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1}+\frac{x-m}{\sqrt{x-1}}=\frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 191. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+3}{1-|x|}}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 192. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m^2(x-1)=-2x-5m+6$ có nghiệm dương là

A. $(-\infty;-1)\cup(-6;\infty)$. **B.** $(-1;6)$. **C.** $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 193. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5-2m}{\sqrt{1-x^2}}$ có nghiệm là

A. $(2;3)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 194. Cho biểu thức $M=x^2+3x+2$, trong đó x là nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$. Khi đó

A. $M<0$. **B.** $6<M<12$.
C. $M>12$. **D.** M nhận giá trị bất kì.

Câu 195. Số dương x thoả mãn bất phương trình $\sqrt{x}<3x$ khi và chỉ khi

A. $x>9$. **B.** $x>\frac{1}{3}$. **C.** $x<\frac{1}{9}$. **D.** $x>\frac{1}{9}$.

Câu 196. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình bậc hai $x^2+2(m+1)x+3m=0$ có nghiệm là

A. $\{0\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 197. Phương trình $mx^2-mx+2=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\le 0$ hoặc $m\ge 8$. **B.** $m<0$ hoặc $m\ge 8$.
C. $0<m\le 8$. **D.** $0\le m\le 8$.

Câu 198. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+1}<2x-1$ là.

A. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$

Câu 199. Nếu $1<m<3$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-2mx+4m-3=0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 200. Nếu $1<m<2$ thì số nghiệm của phương trình $x^2-2mx+5m-6=0$ là bao nhiêu.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Chưa xác định được

Câu 201. Bất phương trình: $mx^2-mx+3>0$ với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m\le 0$ hoặc $m>12$ **B.** $m<0$ hoặc $m>12$
C. $0\le m<12$ **D.** $0<m<12$

Câu 202. Tam thức $f(x)=2mx^2-2mx-1$ nhận giá trị âm với mọi x khi và chỉ khi.

A. $m\le 2$ hoặc $m>0$ **B.** $m<-2$ hoặc $m\ge 0$

C. $-2<m<0$ **D.** $-2<m\le 0$

Câu 203. Bất phương trình $x^2-x+\frac{1}{4}\le 0$ có tập nghiệm là.

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Câu 204. Tìm mệnh đề đúng?

A. $a<b\Rightarrow ac<bc$. **B.** $a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

C. $a<b\vee c<d\Rightarrow ac<bd$ **D.** $a<b\Rightarrow ac<bc,(c>0)$.

Câu 205. Suy luận nào sau đây đúng

A. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow ac>bd$. **B.** $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

C. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a-c>b-d$. **D.** $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow ac>bd$.

Câu 206. Bất đẳng thức $(m+n)^2\ge 4mn$ tương đương với bất đẳng thức nào sau đây

A. $n(m-1)^2-m(n-1)^2\ge 0$. **B.** $m^2+n^2\ge 2mn$.

C. $(m+n)^2+m-n\ge 0$. **D.** $(m-n)^2\ge 2mn$.

Câu 207. Với mọi $a,b\ne 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $a-b<0$. **B.** $a^2-ab+b^2<0$. **C.** $a^2+ab+b^2>0$. **D.** $a-b>0$.

Câu 208. Với hai số x,y dương thoả $xy=36$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $x+y\ge 2\sqrt{xy}=12$. **B.** $x+y\ge 2xy=72$.

C. $4xy\le x^2+y^2$. **D.** $2xy<x^2+y^2$.

Câu 209. Cho hai số x,y dương thoả $x+y=12$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{xy}\le 6$. **B.** $xy<\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=36$.

C. $2xy<x^2+y^2$. **D.** $\sqrt{xy}\ge 6$.

Câu 210. Cho x,y là hai số thực bất kỳ thỏa và $xy=2$. Giá trị nhỏ nhất của $A=x^2+y^2$

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 211. Cho $a>b>0$ và $x=\frac{1+a}{1+a+a^2}$, $y=\frac{1+b}{1+b+b^2}$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $x>y$. **B.** $x<y$.

C. $x=y$. **D.** Không so sánh được.

Câu 212. Cho các bất đẳng thức: (I) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (II) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$ (III) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}$ (với *a, b, c* > *0*). Bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức trên là đúng?

A. chỉ I đúng. **B.** chỉ II đúng. **C.** chỉ III đúng. **D.** I, II, III đều đúng.

Câu 213. Với $a,b,c>0$. Biểu thức $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<P<\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}<P$. **C.** $\frac{4}{3}\le P$. **D.** $\frac{3}{2}\le P$.

Câu 214. Cho $a,b>0$ và $ab>a+b$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a+b=4$. **B.** $a+b>4$. **C.** $a+b<4$. **D.** $a+b\le 4$.

Câu 215. Cho $a<b<c<d$ và $x=(a+b)(c+d), y=(a+c)(b+d), z=(a+d)(b+c)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x<y<z$. **B.** $y<x<z$. **C.** $z<x<y$. **D.** $x<z<y$.

Câu 216. Với $a,b,c,d>0$. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề **sai?**

A. $\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$.

B. $\frac{a}{b}>1\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$.

C. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}>\frac{c}{d}$.

D. Có ít nhất hai trong ba mệnh đề trên là sai.

Câu 217. Hai số a,b thoả bất đẳng thức $\frac{a^2+b^2}{2}\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ thì

A. $a<b$. **B.** $a>b$. **C.** $a=b$. **D.** $a\ne b$.

Câu 218. Cho $x,y,z>0$ và xét ba bất đẳng thức

(I) $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$ (II) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{9}{x+y+z}$ (III) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge 3$. Bất đẳng thức nào là đúng?

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ I và III đúng. **C.** Chỉ III đúng. **D.** Cả ba đều đúng.

Câu 219. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+5\ge 0$ **A.** $(x-1)^2(x+5)\ge 0$. **B.** $-x^2(x+5)\le 0$.

C. $\sqrt{x+5}(x+5)\ge 0$. **D.** $\sqrt{x+5}(x-5)\ge 0$.

Câu 220. Bất phương trình: $2x+\frac{3}{2x-4}<5+\frac{3}{2x-4}$ tương đương với?

A. $2x<5$. **B.** $x<\frac{5}{2}$ và $x\ne 2$. **C.** $x<3$. **D.** $2x>5$.

Câu 221. Bất phương trình: $(x-1)\sqrt{x(x+2)}\ge 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $(x-1)\sqrt{x}\sqrt{x+2}\ge 0$.

B. $\sqrt{(x-1)^2 x(x+2)}\ge 0$.

C. $\dfrac{(x-1)\sqrt{x(x+2)}}{(x-3)^2}\ge 0$.

D. $\dfrac{(x-1)\sqrt{x(x+2)}}{(x-2)^2}\ge 0$.

Câu 222. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x^2\le 3x\Leftrightarrow x\le 3$.

B. $\dfrac{1}{x}<0\Leftrightarrow x\le 1$.

C. $\dfrac{x+1}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow x+1\ge 0$.

D. $x+|x|\ge x\Leftrightarrow |x|\ge 0$.

Câu 223. Cho bất phương trình: $\dfrac{8}{3-x}>1$ (1). Một học sinh giải như sau:

$(1)\overset{(I)}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{3-x}>\dfrac{1}{8}\overset{(II)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\ne 3\\3-x<8\end{cases}\overset{(III)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\ne 3\\x>5\end{cases}$. Hỏi học sinh này giải sai ở bước nào?

A. (I). **B.** (II). **C.** (III). **D.** (II) và (III).

Câu 224. Cho bất phương trình : $\sqrt{1-x}(mx-2)<0$ (*). Xét các mệnh đề sau:(I) Bất phương trình tương đương với $mx-2<0$;

(II) $m\ge 0$ là điều kiện cần để mọi $x<1$ là nghiệm của bất phương trình (*);

(III) Với $m<0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{2}{m}<x<1$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** (II) và (III). **D.** Cả (I), (II), (III).

Câu 225. Cho bất phương trình: $m^2(x+2)\le m^2(x+1)$. Xét các mệnh đề sau:Bất phương trình tương đương với $x+2\le x+1$;

(II) Với $m=0$, bất phương trình thoả $\forall x\in\mathbb{R}$;

(III) Với mọi giá trị $m\in R$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (II). **B.** (I) và (II). **C.** (I) và (III). **D.** (I), (II) và (III).

Câu 226. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-2006}>\sqrt{2006-x}$ là gì? **A.** $\varnothing$. **B.** $[2006,+\infty)$. **C.** $(-\infty,2006)$. **D.** $\{2006\}$.

Câu 227. Bất phương trình $5x-1>\dfrac{2x}{5}+3$ có nghiệm là

A. $\forall x$. **B.** $x<2$. **C.** $x>-\dfrac{5}{2}$. **D.** $x>\dfrac{20}{23}$.

Câu 228. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $mx+m<2x$ vô nghiệm

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 229. Nghiệm của bất phương trình $|2x-3|\le 1$ là:

A. $1\le x\le 3$. **B.** $-1\le x\le 1$. **C.** $1\le x\le 2$. **D.** $-1\le x\le 2$.

Câu 230. Bất phương trình $|2x-1|>x$ có nghiệm là:

A. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

C. $x\in\mathbb{R}$. **D.** Vô nghiệm.

Câu 231. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{1-x}<1$ là:

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 232. $x=-2$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $|x|<2$. **B.** $(x-1)(x+2)>0$. **C.** $\frac{x}{1-x}+\frac{1-x}{x}<0$. **D.** $\sqrt{x+3}<x$.

Câu 233. Tập nghiệm của bất phương trình $x+\sqrt{x+2}\le 2+\sqrt{x+2}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $(-\infty;2)$.

C. $\{2\}$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 234. $x=-3$ thuộc nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+3)(x+2)>0$. **B.** $(x+3)^2(x+2)\le 0$.

C. $x+\sqrt{1-x^2}\ge 0$. **D.** $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{3+2x}>0$.

Câu 235. Bất phương trình $\frac{2-x}{2x+1}\ge 0$ có tập nghiệm là:

A. $|x|<2$. **B.** $(x-1)(x+2)>0$. **C.** $\frac{x}{1-x}+\frac{1-x}{x}<0$. **D.** $\sqrt{x+3}<x$.

Câu 236. Bất phương trình $\frac{x-1}{x^2+4x+3}\le 0$ có tập nghiệm là:

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-3;-1)\cup[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-3)\cup(-1;1]$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 237. Tập nghiệm của bất phương trình $x(x-6)+5-2x>10+x(x-8)$:

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 238. Tập nghiệm bất phương trình $\frac{x^2-5x+6}{x-1}\ge 0$ là:

A. $(1;3]$. **B.** $(1;2]\cup[3;+\infty)$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-\infty;1)\cup[2;3]$.

Câu 239. Bất phương trình $\frac{x-1}{x+2}\ge\frac{x+2}{x-1}$ có tập nghiệm là:

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup\left[-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 240. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-2x+3>0$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Câu 241. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+9>6x$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 242. Tập nghiệm của bất phương trình $x(x^2-1)\geq 0$ là:

A. $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1;0]\cup[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[0;1)$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 243. Bất phương trình $mx>3$ vô nghiệm khi:

A. $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 244. Nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$:

A. $x<3$ hay $x>5$. **B.** $x<-5$ hay $x>-3$. **C.** $|x|<3$ hay $|x|>5$. **D.** $\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 245. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $|x^2-4x|<0$.

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=(0;4)$. **D.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 246. Tìm tham số thực m để bất phương trình $m^2x+3<mx+4$ có nghiệm.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$ hoặc $m=0$. **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

Câu 247. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x(x-1)^2\geq 4-x$.

A. $[3;+\infty)$. **B.** $(4;10)$. **C.** $(-\infty;5)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 248. Cho bất phương trình $m(x-m)\geq x-1\geq 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-\infty;m+1]$.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Câu 249. Cho bất phương trình $mx+6<2x+3m$ có tập nghiệm là S. Hỏi các tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S với $m<2$?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Câu 250. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx+m<2x$ vô nghiệm.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 251. Bất phương trình $|2x-1|>x$ có tập nghiệm là:

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** vô nghiệm.

Câu 252. Tập nghiệm của bất phương trình $5x-\frac{x+1}{5}-4<2x-7$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 253. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2-6x+8\leq 0$.

A. $[2;3]$. **B.** $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$. **C.** $[2;4]$. **D.** $[1;4]$.

Câu 254. Gọi x_0 là một nghiệm của bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào không có chứa x_0.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $[8;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $[6;+\infty)$.

Câu 255. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-7x+6<0 \\ |2x-1|<3 \end{cases}$ là:

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\varnothing$.

Câu 256. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-3x+2\le 0 \\ x^2-1\le 0 \end{cases}$.

A. $\varnothing$. **B.** $\{1\}$. **C.** $[1;2]$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 257. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases}$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(1;4)$.

Câu 258. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+1>x-2 \end{cases}$ là:

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Câu 259. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1\le 0 \\ x-m>0 \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

Câu 260. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x)>0 \\ x<m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi:

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m<-1$. **D.** $m=0$.

Câu 261. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}<-x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2}<3-x \end{cases}$ là:

A. $\left(-2;\dfrac{4}{5}\right)$. **B.** $\left[-2;\dfrac{4}{5}\right]$. **C.** $\left(-2;\dfrac{3}{5}\right)$. **D.** $\left[-1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 262. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6)<-3 \\ \dfrac{5x+m}{2}>7 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m>-11$. **B.** $m\ge -11$. **C.** $m<-11$. **D.** $m\le -11$.

Câu 263. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x-3<0 \\ m-x<1 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m<4$. **B.** $m>4$. **C.** $m\le 4$. **D.** $m\ge 4$.

Câu 264. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7}>4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2}<2x+25 \end{cases}$ (1). Số nghiệm nguyên của (1) là

A. vô số. **B.** 4 . **C.** 8. **D.** 0.

Câu 265. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-9<0 \\ (x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $-1\le x<2$. **B.** $-3<x\le -\dfrac{4}{3}$ hoặc $-1\le x\le 1$.

C. $-\dfrac{4}{3}\le x\le 1$ hoặc $1\le x<3$. **D.** $-\dfrac{4}{3}\le x\le -1$ hoặc $x\ge 1$.

Câu 266. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2+4x+3\ge 0 \\ 2x^2-x-10\le 0 \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1\le x<1$ hoặc $\dfrac{3}{2}<x\le \dfrac{5}{2}$. **B.** $-2\le x<1$.

C. $-4\le x<-3$ hoặc $-1\le x<3$. **D.** $-1\le x\le 1$ hoặc $\dfrac{3}{2}<x\le \dfrac{5}{2}$.

Câu 267. Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} mx\le m-3 \\ (m+3)x\ge m-9 \end{cases}$

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** Đáp số khác.

Câu 268. Xác định m để với mọi x ta có $-1\le \dfrac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$

A. $-\dfrac{5}{3}\le m<1$. **B.** $1<m\le \dfrac{5}{3}$. **C.** $m\le -\dfrac{5}{3}$. **D.** $m<1$.

Câu 269. Khi xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-1}$ ta có

A. $f(x)>0$ khi $-7<x<-1$ hoặc $1<x<3$.

B. $f(x)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

C. $f(x)>0$ khi $-1<x<0$ hoặc $x>1$.

D. $f(x)>0$ khi $x>-1$.

Câu 270. Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-bx+3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm?

A. $b\in\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

C. $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 271. Giá trị nào của m thì phương trình $x^2-mx+1-3m=0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m<\frac{1}{3}$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

Câu 272. Gía trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m<1$. **B.** $m>2$. **C.** $m>3$. **D.** $1<m<3$.

Câu 273. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in\left(-\infty;\frac{-3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(\frac{-3}{5};1\right)$.

C. $m\in\left(\frac{-3}{5};+\infty\right)$. $ax^2-x+a\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 274. Tìm m để $(m+1)x^2+mx+m<0,\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<\frac{-4}{3}$. **D.** $m>\frac{4}{3}$.

Câu 275. Tìm m để $f(x)=x^2-2(2m-3)x+4m-3>0,\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m>\frac{3}{2}$. **B.** $m>\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}<m<\frac{3}{2}$. **D.** $1<m<3$.

Câu 276. Với giá trị nào của a thì bất phương trình ?

A. $a=0$. **B.** $a<0$. **C.** $0<a\leq\frac{1}{2}$. **D.** $a\geq\frac{1}{2}$.

Câu 277. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $x^2-x+m\leq 0$ vô nghiệm?

A. $m<1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<\frac{1}{4}$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

Câu 278. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Câu 279. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 và $x_1+x_2+x_1x_2<1$?

A. $1<m<2$. **B.** $1<m<3$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

Câu 280. Gọi x_1,x_2 là nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-5x+6=0$. Khẳng định nào sau đúng?

A. $x_1+x_2=-5$. **B.** $x_1^2+x_2^2=37$. **C.** $x_1x_2=6$. **D.** $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{13}{6}=0$.

Câu 281. Các giá trị m làm cho biểu thức $x^2+4x+m-5$ luôn luôn dương là:

A. $m<9$. **B.** $m\geq 9$. **C.** $m>9$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 282. Các giá trị m để tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m\leq 0$ hoặc $m\geq 28$. **B.** $m<0$ hoặc $m>28$. **C.** $0<m<28$.

D. $m>0$.

Câu 283. Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-7x-15}$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(5;+\infty)$.

B. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup[5;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup[5;+\infty)$.

D. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup[5;+\infty)$.

Câu 284. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x)=-x^2+5x-6$ được xác định như sau

A. $f(x)<0$ với $2<x<3$ và $f(x)>0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

B. $f(x)<0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)>0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

C. $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

D. $f(x)>0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)<0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

Câu 285. Giá trị của m làm cho phương trình $(m-2)x^2-2mx+m+3=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt là:

A. $m<6$ và $m\neq 2$.

B. $m<0$ hoặc $2<m<6$.

C. $2<m<6$.

D. $m>6$.

Câu 286. Cho $f(x)=mx^2-2x-1$. Xác định m để $f(x)<0$ với $x\in\mathbb{R}$.

A. $m<-1$.

B. $m<0$.

C. $-1<m<0$.

D. $m<1$ và $m\neq 0$.

Câu 287. Xác định m để phương trình $(m-3)x^3+(4m-5)x^2+(5m+4)x+2m+4=0$ có ba nghiệm phân biệt bé hơn 1.

A. $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\neq 12$.

B. $-\frac{25}{8}<m<0$ hoặc $m>3$ và $m\neq 4$.

C. $m\in\varnothing$.

D. $0<m<\frac{5}{4}$.

Câu 288. Cho phương trình $(m-5)x^2+(m-1)x+m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<2<x_2$.

A. $m<\frac{22}{7}$.

B. $\frac{22}{7}<m<5$.

C. $m\geq 5$.

D. $\frac{22}{7}\leq m\leq 5$.

Câu 289. Cho phương trình $x^2-2x-m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm $x_1<x_2<2$.

A. $m>0$.

B. $m<-1$.

C. $-1<m<0$.

D. $m>-\frac{1}{4}$.

Câu 290. Cho $f(x)=-2x^2+(m-2)x-m+4$. Tìm m để $f(x)$ không dương với mọi x.

A. $m\in\varnothing$.

B. $m\in\mathbb{R}\setminus\{6\}$.

C. $m\in\mathbb{R}$.

D. $m=6$.

Câu 291. Xác định m để phương trình $(x-1)\left[x^2+2(m+3)x+4m+12\right]=0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1.

A. $m<-\frac{7}{2}$.

B. $-2<m<1$ và $m\neq-\frac{16}{9}$.

C. $-\frac{7}{2}<m<-1$ và $m\neq-\frac{16}{9}$.

D. $-\frac{7}{2}<m<-3$ và $m\neq-\frac{19}{6}$.

Câu 292. Phương trình $(m+1)x^2-2(m-1)x+m^2+4m-5=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thoả $2<x_1<x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-2<m<-1$. **B.** $m>1$. **C.** $-5<m<-3$. **D.** $-2<m<1$.

Câu 293. Cho bất phương trình $(2m+1)x^2+3(m+1)x+m+1>0$ (1). Với giá trị nào của m thì bất phương trình trên vô nghiệm.

A. $m\neq-\frac{1}{2}$. **B.** $-5<m<-1$. **C.** $-5\leq m\leq-1$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 294. Cho phương trình $mx^2-2(m+1)x+m+5=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thoả $x_1<0<x_2<2$.

A. $-5<m<-1$. **B.** $-1<m<5$. **C.** $m<-5$ hoặc $m>1$. **D.** $m>-1$ và $m\neq0$.

Câu 295. Cho $f(x)=-2x^2+(m+2)x+m-4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $-14<m<2$. **B.** $-14\leq m\leq2$.
C. $-2<m<14$. **D.** $m<-14$ hoặc $m>2$.

Câu 296. Tìm m để phương trình $x^2-2(m+2)x+m+2=0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$ và nghiệm kia nhỏ hơn 1.

A. $m=0$. **B.** $m<-1$ hoặc $m>-\frac{2}{3}$.

C. $m>-\frac{2}{3}$. **D.** $-1<m<-\frac{2}{3}$.

Câu 297. Cho $f(x)=3x^2+2(2m-1)x+m+4$. Tìm m để $f(x)$ âm với mọi x.

A. $m<-1$ hoặc $m>\frac{11}{4}$. **B.** $-1<m<\frac{11}{4}$. **C.** $-\frac{11}{4}<m<1$. **D.** $-1\leq m\leq\frac{11}{4}$.

Câu 298: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{4}{x}+\frac{9}{1-x}$ với 0<x<1 là

A. 25 **B.** 24 **C.** 35 **D.** 36

Câu 299: Tìm m để bất phương trình $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ nghiệm đúng với mọi x

A. $-2<m<1$ **B.** $-7<m<2$ **C.** $-7<m<1$ **D.** $-7<m\leq1$

Câu 300: Tìm m để phương trình $mx^2-2(m-1)x+4m-1=0$ có 2 nghiệm âm

A. $\frac{1}{4}<m<\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}<m\leq\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

C. $\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}\leq m<\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

Câu 301: Tìm m để bất phương trình $mx^2-10x-5<0$ nghiệm đúng với mọi x

A. $m>-5$ **B.** $m\geq-5$ **C.** $m<-5$ **D.** $m\leq-5$

Câu 302: Tập nghiệm của bất phương trình $x(x^2-1)\geq0$ là

A. $(-\infty;-1]\cup[0;1)$ **B.** $[-1;1]$ **C.** $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$ **D.** $[-1;0]\cup[1;+\infty)$

Câu 303 Tìm m để bất phương trình $m(m+2)x^2+2mx+2>0$ nghiệm đúng với mọi x

:

A. $m < -4; m > 0$ **B.** $m \le -4; m \ge 0$ **C.** $m < -4; m \ge 0$ **D.** $m < -4; m \ge 1$

Câu 7 : Nghiệm của bất phương trình $|x+2| + |-2x+1| \le x+1$ là

A. $1 < x < 2; x > 4$ **B.** $\varnothing$ **C.** $-2 < x < 0; x > 4$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 304 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với 0<x<1 là

A. 4 **B.** -4 **C.** 5 **D.** 6

Câu 305 : Tìm m để bất phương trình $5x^2 - x + m \le 0$ vô nghiệm

A. $m \ge \frac{1}{20}$ **B.** $m \le \frac{1}{20}$ **C.** $m > \frac{1}{20}$ **D.** $m < \frac{1}{20}$

Câu 306 : Nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{x-2}$ là

A. $-2 < x < 0; 1 < x < 2; x > 4$ **B.** $1 < x < 2; x > 4$

C. $-2 < x < 0; x > 4$ **D.** $-2 < x < 0; 1 < x < 2$

Câu 307 : Nghiệm của bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1$ là

A. $x < -1; x > 2$ **B.** $x < -1; x > 3$ **C.** $x < -2; x > 2$ **D.** $x \le -1; x > 2$

Câu 308 : Nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4} \ge 1$ là

A. $-2 < x \le -1; x > 2$ **B.** $-2 < x \le -1; x \ge 2$

C. $-2 \le x \le -1; x > 2$ **D.** $-2 < x < -1; x > 2$

Câu 309 : Với bất kỳ x,y,z ta luôn có

A. $2xyz \le x^2 + y^2z^2$ **B.** $2xyz < x^2 + y^2z^2$ **C.** $2xyz > x^2 + y^2z^2$ **D.** $2xyz \ge x^2 + y^2z^2$

Câu 310 : Bất phương trình $\frac{x-1}{x+2} \ge \frac{x+2}{x-1}$ có tập nghiệm là

A. $\left(-2; \frac{-1}{2}\right]$ **B.** $(-2; +\infty)$ **C.** $\left(-2; \frac{-1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$ **D.** $(-\infty; -2) \cup \left[\frac{-1}{2}; 1\right)$

Câu 311 : Nghiệm của bất phương trình $|x-3| > -1$ là

A. $1 < x < 2; x > 4$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $-2 < x < 0; x > 4$ **D.** $\varnothing$

Câu 312 : Nghiệm của bất phương trình $|5 - 8x| \le 11$ là

A. $\frac{-3}{4} < x \le 2$ **B.** $\frac{-3}{4} \le x \le 2$ **C.** $\frac{-3}{4} \le x < 2$ **D.** $\frac{3}{4} \le x \le 2$

Câu 313 : Bất phương trình mx>3 vô nghiệm khi

A. $m < 0$ **B.** $m > 0$ **C.** $m \ne 0$ **D.** $m = 0$

Câu 314 : Nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x + 3 > 0$ là

A. $x \in \varnothing$ **B.** $x \in \mathbb{R}$ **C.** $x \in (1; 2)$ **D.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 315 : Cho $a \ge 0; b \ge 0$ .Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ **B.** $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ **C.** $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{ab}$ **D.** $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$

Câu 316: Nghiệm của bất phương trình $|2x-1| \le x+2$ là

A. $\frac{-1}{3} \le x \le 3$ **B.** $\frac{1}{3} \le x \le 3$ **C.** $\frac{-1}{3} \le x \le 2$ **D.** $\frac{-1}{3} < x \le 3$

Câu 317: Nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$ là

A. $-6 < x \le -3$ **B.** $-6 < x < 3$ **C.** $-6 < x < -3$ **D.** $-6 < x < -2$

Câu 318: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 9 > 6x$ là

A. $(3;+\infty)$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $(-\infty;3)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Câu 319: Tập nghiệm của bất phương trình $x(x-6)+5-2x > 10 + x(x-8)$

A. $\mathbb{R}$ **B.** $(-\infty;5)$ **C.** $(5;+\infty)$ **D.** $\varnothing$

Câu 320: Nghiệm của bất phương trình $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$ là

A. $x < -1; 0 < x < \frac{1}{2}; x \ge 1$ **B.** $x < -1; 0 < x < \frac{1}{2}$

C. $x < -1; 0 < x < \frac{1}{2}; x > 1$ **D.** $0 < x < \frac{1}{2}; x > 1$

Câu 321: Tìm m để bất phương trình $5x^2 - x + m > 0$ nghiệm đúng với mọi x

A. $m \ge \frac{1}{20}$ **B.** $m < \frac{1}{20}$ **C.** $m > \frac{1}{20}$ **D.** $m \le \frac{1}{20}$

Câu 322: Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$ có 2 nghiệm dương

A. $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} < m < 0$ **B.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} \le m < 0$ **C.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} < m < 0$ **D.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} \le m \le 0$

Câu 323: Nghiệm của bất phương trình $x^2 + 3 > 6x$ là

A. $x \in \varnothing$ **B.** $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ **C.** $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **D.** $x \in (1;2)$

Câu 324: Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu

A. $0 < m < 1$ **B.** $0 < m < \frac{1}{4}$ **C.** $0 < m \le \frac{1}{4}$ **D.** $0 \le m < \frac{1}{4}$

Câu 325: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x + 3 > 0$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **B.** $\varnothing$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 326: Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

A. $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} < m < 0; 0 < m \le \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ **B.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} < m < 0; 0 < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

C. $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} < m \le 0; 0 < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$ **D.** $\frac{-1-\sqrt{13}}{3} \le m < 0; 0 < m < \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

Câu 327: Tìm m để phương trình $(m^2+m+1)x^2 + (2m-3)x + m - 5 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

A. $0 < m \le 1$ **B.** $0 < m < 2$ **C.** $-1 < m < 1$ **D.** $m \in \varnothing$

Câu 328: Nghiệm của bất phương trình $\frac{10-x}{5+x^2} > \frac{1}{2}$ là

A. $-6 < x < 3$ **B.** $-6 < x < 2$ **C.** $-5 < x < 3$ **D.** $-5 < x \le -3$

Câu 329: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-5x+6}{x-1}\ge 0$ là

A. $(-\infty;1)\cup[2;3]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[2;3]$ **D.** $(1;2]\cup[3;+\infty)$

Câu 330: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4x^3-x^4$ với $0\le x\le 4$ là

A. 27 **B.** 25 **C.** 15 **D.** -27

Câu 331: Nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+2}$ là

A. $x<-1; 0<x<\frac{1}{2}$ **B.** $x<-1; 0<x<\frac{1}{2}; x\ge 1$

C. $x<-3; -2<x<-1; x>1$ **D.** $0<x<\frac{1}{2}; x>1$

Câu 332: Cho $a\ge 0; b\ge 0$ .Hãy chọn mệnh đề đúng

A. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ge\frac{1}{\frac{a+b}{2}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}<\frac{1}{\frac{a+b}{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{\frac{a+b}{2}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{1}{\frac{a+b}{2}}$

Câu 333: Nghiệm của bất phương trình $6x^2-x-2\ge 0$ là

A. $x\le\frac{1}{2}; x\ge\frac{2}{3}$ **B.** $x\le\frac{-1}{2}; x\ge\frac{2}{3}$ **C.** $x\le\frac{-1}{2}; x\ge\frac{1}{3}$ **D.** $x\le\frac{-1}{2}; x>\frac{2}{3}$

Câu 334: Nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+1}{x^2+3x-10}<0$ là

A. $-6<x<3$ **B.** $-6<x<2$ **C.** $-5<x<2$ **D.** $-5<x\le -3$

Câu 335: Tìm m để phương trình $x^2-6mx+2-2m+9m^2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

A. $0<m\le 1$ **B.** $0<m<2$ **C.** $-1<m<1$ **D.** $0<m<1$

Câu 336: Tìm m để bất phương trình $mx^2-10x-5\ge 0$ vô nghiệm

A. $m>-5$ **B.** $m\le -5$ **C.** $m\ge -5$ **D.** $m<-5$

CÒN TIẾP…..